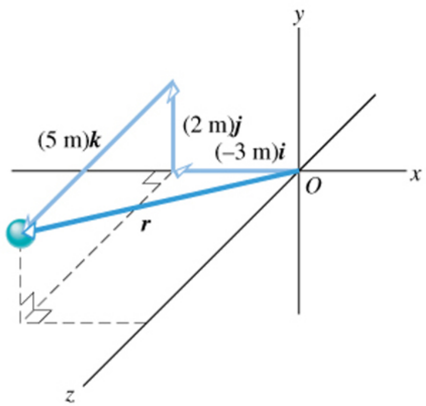
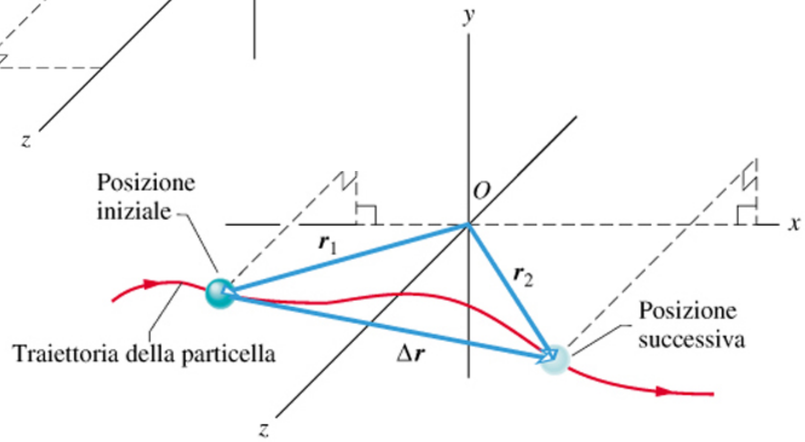
Il Corso di Fisica per Scienze Biologiche

- Prof. Attilio Santocchia
- Ufficio presso il Dipartimento di Fisica (Quinto Piano) Tel. 075-585 2708
- E-mail: attilio.santocchia@pg.infn.it
- Web: http://cms.pg.infn.it/santocchia/
- Testo: Fondamenti di Fisica (Halliday-Resnick-Walker, Casa Editrice Ambrosiana)

Velocità media: scalare e vettoriale

- La **posizione** di un punto nello spazio può essere identificata dal vettore che congiunge l'origine degli assi cartesian e il punto
- Lo **spostamento** può essere identificatc come la differenza tra il vettore posizione finale e posizione iniziale
- La **velocità media vettoriale** è il rapporto tra il vettore spostamento e il tempo impiegato per spostamento
- La **velocità media scalare** è semplicemente il rapporto tra la distanza percorsa e il tempo impiegato a percorrerla
- **Nota Bene**: il modulo della velocità media vettoriale e la velocità media scalare possono essere diversi!



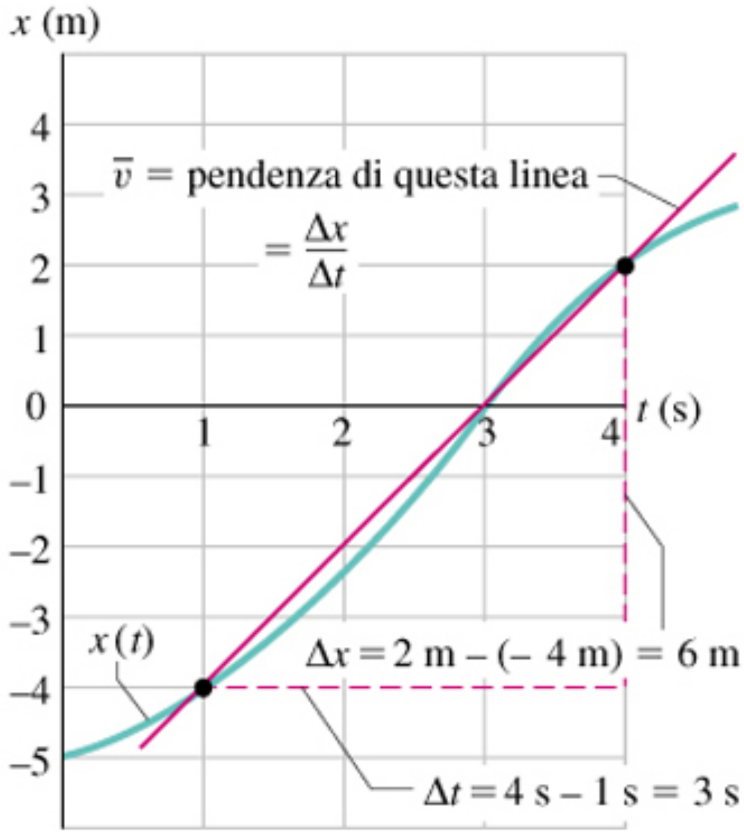


$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} \Rightarrow \left|\vec{v}_m\right| = \frac{\left|\Delta \vec{r}\right|}{\Delta t}$$

$$v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t} \neq \left|\vec{v}_m\right|$$

Diagramma orario della velocità

- Con un po' di geometria si vede che nel diagramma orario del moto a una dimensione la pendenza della retta che unisce inizio e fine dello spostamento è proprio la velocità media scalare
- Nel moto a una dimensione il modulo della velocità media vettoriale coincide sempre con la velocità media scalare
- In 2 o 3 dimensioni il modulo dello spostamento e lo spazio percorso possono assumere valori diversi
- In 2 o 3 dimensioni il diagramma orario si riferisce alla variazione di una singola coordinata o (è la stessa cosa) ad una componente del vettore



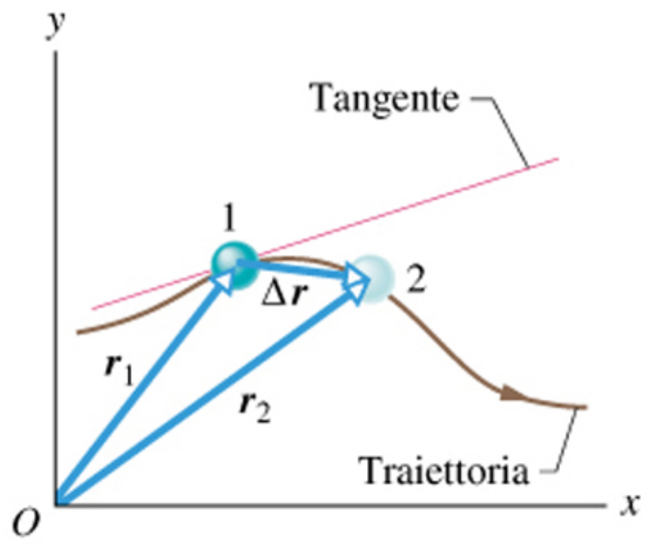
Velocità Istantanea: scalare e vettoriale

- E' data in entrambi i casi dal limite per Δt che tende a 0 nelle formule precedenti
- Si può dimostrare che il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria per ogni punto della traiettoria
- ORA il modulo della velocità vettoriale istantanea coincide con la velocità istantanea scalare

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$



Accelerazione

- Tutto quello visto fino ad ora per la velocità si ripete per l'accelerazione semplicemente sostituendo al termini spostamento la variazione di velocità
- Si può quindi parlare di accelerazione media e istantanea (come limite per $\Delta t \to 0$ dell'accelerazione media)
- Qui però la matematica si complica…

E' la derivata del versore tangente

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\hat{\boldsymbol{\tau}}\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{ds}{dt}\right)\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v_s \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = a_t \hat{\boldsymbol{\tau}} + v_s \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \text{e} \quad v_s = \frac{ds}{dt}$$

Nota Bene: il versore $\boldsymbol{\tau}$ viene derivato perché la sua direzione varia nel tempo; i versori **i**, **j** e **k** non variano nel tempo… quindi non vanno derivati (sono costanti)

Derivata del versore tangente

$$\hat{r} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \qquad |\hat{r}| = 1 = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

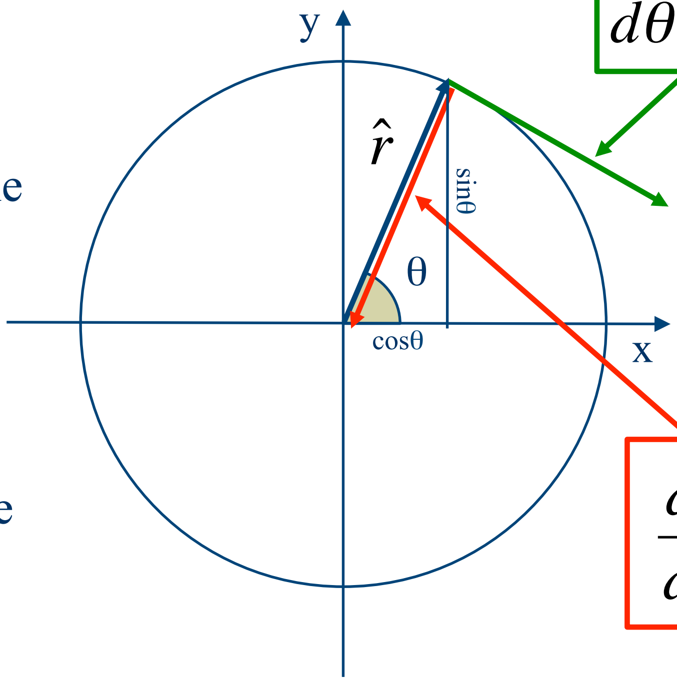
$$\hat{\tau} = \frac{d}{d\theta}(\hat{r}) = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) = (-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) \quad \text{ma} \quad |\hat{\tau}| = \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2} = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\tau} = r_x\tau_x + r_y\tau_y = \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta(\cos\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sono Perpendicolari!}$$

$$\frac{d}{d\theta}(\hat{\tau}) = \frac{d^2\hat{r}}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) = -\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j} = -(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}) = -\hat{r}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\tau}}$$

- La derivata di un versore è un versore perpendicolare al versore dato
- La derivata seconda di un versore è un versore che ha la stessa direzione del versore dato ma verso opposto
- Spostamento → Velocità → Accelerazione
  - La velocità è tangente alla traiettoria
  - L'accelerazione ha una componente tangente alla traiettoria e una componente perpendicolare alla traiettoria



$$\boxed{\frac{d\hat{\tau}}{d\theta}}$$

Accelerazione 2

- Il vettore accelerazione per un moto generico si può scomporre in 2 vettori:
  - L'accelerazione tangenziale (tangente alla traiettoria)
  - L'accelerazione normale (perpendicolare all'accelerazione tangenziale)

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad \vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{\boldsymbol{\tau}} = a_t \hat{\boldsymbol{\tau}} \qquad \vec{a}_n = v_s \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{dt}$$

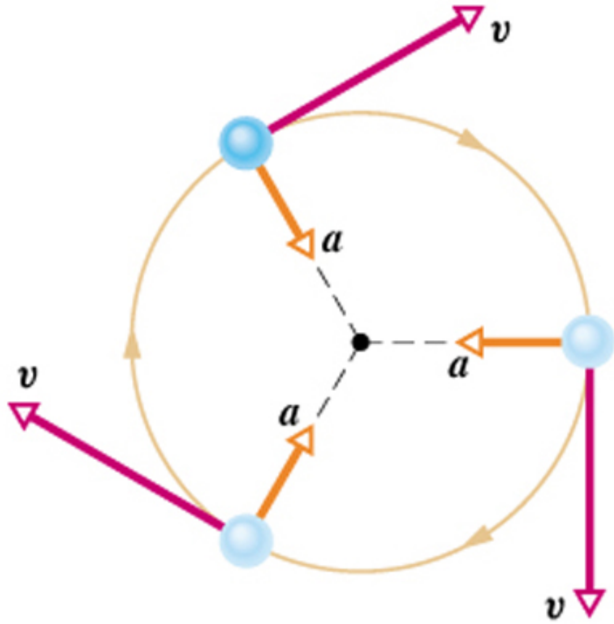
- Per un moto rettilineo l'accelerazione normale è nulla
- Se invece l'accelerazione tangenziale è nulla abbiamo un moto circolare

Accelerazione 3

- Tutti i problemi relativi al moto del punto materiale si risolvono a partire dalle relazioni viste ora…
- Quindi bisogna saper derivare se si vuole conoscere *v* ed *a* usando l'equazione del moto…
- …e bisogna sapere integrare se conosco invece *v* o *a* e voglio ricavare la legge del moto…
- In genere per poter risolvere completamente i problemi occorre anche conoscere quelle che vengono definite "condizioni al contorno"
- Esempio Semplice: per descrivere completamente il moto di un punto materiale non basta dire che è un moto rettilineo uniformemente accelerato con $a=10m/sec^2$…
- … ma occorre ad esempio specificare anche che la posizione all'istante $t=5sec$ nella scala dei tempi è $x(5)=12m$ e la velocità all'istante $t=10sec$ è $v(10)=20m/sec$
- a questo punto posso ricavare rapidamente la legge oraria $x=x(t)$
- **Nel libro ci sono decine di problemi ed esercizi svolti….**

Moto Circolare Uniforme

- Nel moto circolare uniforme la particella compie una traiettoria circolare con velocità scalare costante
- La direzione del moto varia ad ogni istante $\Rightarrow$ il moto è accelerato
- Indichiamo con $\vec{r}$ il vettore posizione e con $\hat{r}$ il versore del vettore $\vec{r}$.
- Chiamiamo ω la velocità angolare del moto circolare, in questo caso la velocità è costante ed è definita esattamente come la velocità (media e istantanea) dove si considera l'angolo percorso al posto della posizione



velocità angolare media

velocità angolare istantanea

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} \quad \textbf{mentre} \quad \omega(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$$

Accelerazione Centripeta

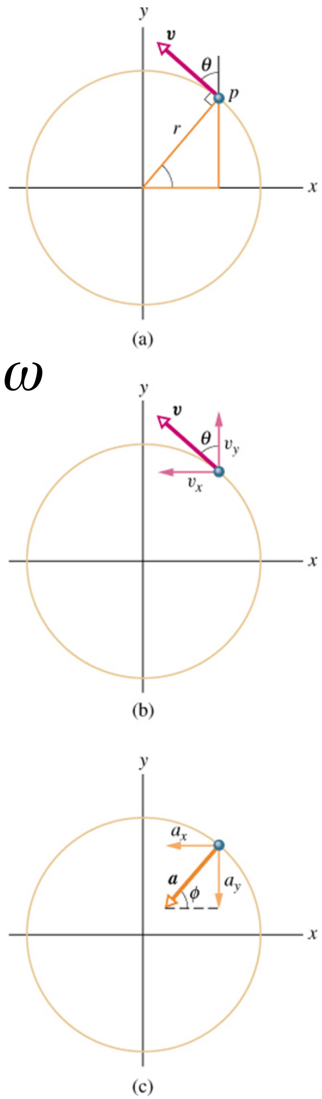
$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \frac{d}{dt}\left(r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j}\right) = \frac{d}{dt}\left(r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j}\right)$$

$$= r\omega(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}) \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{e} \quad \theta = \theta(t)$$

$$= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \Rightarrow v_x = -v\sin\theta \quad \text{e} \quad v_y = v\cos\theta \quad \text{dove} \quad v = r\omega$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v\frac{d}{dt}\left(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}\right)$$

$$= v\omega\left(-\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}\right) = -\frac{v^2}{r}\left(\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}\right) = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$



L'accelerazione in un **moto circolare uniforme** è diretta verso il centro e ha modulo $a=v^2/r$

Tale accelerazione viene chiamata **Centripeta**

La velocità angolare

- Si misura in (rad·s^{-1}) poiché gli angoli si misurano in radianti
- Il tempo necessario a completare un giro è indicato con *T* e viene chiamato periodo del moto
- La frequenza di rotazione è definita come l'inverso del Periodo e si misura in Hertz (Hz=s^{-1})

$$\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow [\nu] = [t^{-1}] = s^{-1} = Hz$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Accelerazione

- Il moto generico di un punto materiale può essere descritto in vari modi. Possiamo distinguere questi casi più frequenti:
  - Moto rettilineo uniforme → velocità costante e accelerazione nulla
  - Moto circolare uniforme → velocità scalare costante, velocità vettoriale con modulo costante ma direzione che varia ad ogni istante. Accelerazione tangenziale nulla. Accelerazione normale sempre diretta verso il centro della circonferenza e con modulo costante
  - Moto rettilineo uniformemente accelerato → La velocità vettoriale ha direzione e verso costante ma il modulo aumenta linearmente nel tempo. Accelerazione tangenziale costante. Accelerazione normale nulla.
  - Moto uniformemente decelerato → come il precedente ma l'accelerazione è negativa (il corpo sta rallentando)
  - Moto rettilineo vario → l'accelerazione normale è sempre nulla. Velocità e accelerazione tangenziale variano
  - Moto vario → Accelerazione tangenziale e normale variano. Il moto non è rettilineo (Altrimenti l'accelerazione normale sarebbe nulla)
  - Punto Fermo → velocità e accelerazione nulla

Formule utili

- Derivata di una funzione composta

$$\frac{d}{dt}f(x)=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \text{esempio}: \frac{d}{dt}\sin\theta=\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

- Moto unidimensionale a velocità costante

$$x=x_0+v_x t$$

- Moto unidimensionale ad accelerazione costante

$$v_x=v_{x0}+a_x t$$

$$\bar{v}_x=\frac{1}{2}\left(v_x+v_{x0}\right)$$

$$x=x_0+v_{x0}t+\frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x^2=v_{x0}^2+2a_x(x-x_0)$$

Esercizio 1

- Quanti metri percorre un'auto che sta viaggiando a 88 Km/h in 1 s impiegato dal guidatore ad osservare un incidente sul bordo della strada?

Esercizio 2

- Calcolare la velocità media nei due casi seguenti:

  a) una persona cammina per 72 m ad una velocità di 1.2 m/s e poi corre per 72 m ad una velocità di 3 m/s

  b) una persona cammina per 1 minuto ad una velocità di 1.2 m/s e poi corre per 1 min ad una velocità di 3 m/s

Esercizio 3

- Un jumbo per poter decollare deve raggiungere una velocità di 360 Km/h. Se la pista è lunga 1.8 Km, qual è la minima accelerazione con partenza da fermo?

Esercizio 4

- Un’auto che si muove con accelerazione costante percorre 50 metri in 6s. La sua velocità nel punto finale è di 15 m/s

a) Qual era la sua velocità all’istante iniziale?

b) Qual è l’accelerazione?

Esercizio 5

- Un razzo è lanciato verticalmente e sale con un’accelerazione verticale costante di 20 m/s^2 per 1 minuto. Allora tutto il combustibile è consumato ed esso continua a salire come un corpo libero:
  a) Quale altezza raggiunge?
  b) Qual è il tempo passato dall’istante del lancio a quello in cui il razzo ricade per terra?

Esercizio 6

- Certe stelle di neutroni possono ruotare a 1 giro/s. Se una di tali stelle ha un raggio di 20 Km, qual è l'accelerazione di un oggetto all'equatore della stella?