Meccanica

La meccanica studia la parte più immediata nell’osservazione dei fenomeni naturali:

La meccanica si occupa delle leggi che regolano il moto dei corpi materiali.

Essa rappresenta la base di tutti i concetti più importanti.

Le prime osservazioni elementari in meccanica riguardano la definizione delle grandezze più importanti ed le leggi che regolano il moto dei

punti materiali

Per punti materiali si intendono oggetti di dimensioni
piccole rispetto all'ambiente circostante, al limite dei
punti geometrici dotati di massa finita.

Le prime osservazioni effettuate con

Metodo Scientifico

(nessuna assunzione a priori e ripetibilità delle osservazioni)

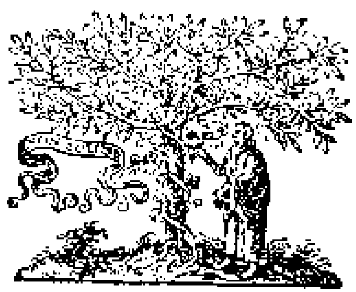
risalgono a Galileo (1564-1642).

La prima osservazione qualitativa riguarda il fatto che per porre un oggetto, posto su un piano orizzontale, in uno stato di moto occorre che esso venga perturbato.

Diremo che occorre una forza per mettere in moto l'oggetto.

L’origine del metodo scietifico

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.



IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?

Simp. *Non si può dir altrimenti.*

Salu. *Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti, quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato hà la sua radice, ogni radice il suo quadrato, nè quadrato alcuno hà più d'una sola radice, nè radice alcuna più d'un quadrato solo.*

Simp. *Così stà.*

Salu. *Mà se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare, che elle non siano, quante tutti i numeri; poiche non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato: E stante questo converrà dire, che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiche tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo tutti i numeri esser assai più, che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati; e pur tuttavia si và la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto à maggior numeri si trapassa; perche fino à cento vi sono dieci quadrati, che è quanto à dire, la decima parte esser quadrati: in dieci mila solo la centesima parte son quadrati: in un millione solo la millesima, e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire tanti essere i quadrati, quanti tutti i numeri insieme.*

Sagr. *Che dunque si hà da determinare in questa occasione?*

Salu. *Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che à dire infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici; nè la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, nè questa maggior di quella; & in ultima conclusione gli attributi di eguale, maggiore, e minore non hauer luogo ne gl' infiniti, mà solo nelle quantità terminate. E però quando il S. Simp. mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere, che nelle maggiori non siano più punti, che nelle minori, io gli rispondo, che non ve ne sono nè più nè manco, nè altrettanti; mà in*

E ciasche-

Tuttavia gli oggetti lasciati liberi si muovono con tendenza a dirigersi verso il centro della Terra (moto verso il *basso*).

Diremo quindi che esiste una forza dovuta alla Terra, che verrà chiamata ***forza di gravità***, la quale è sempre diretta verso il basso.

L'esperimento più semplice da effettuare consiste nello studiare il moto di un corpo in caduta a causa della forza di gravità.

Galileo ha studiato questo processo facendo scendere una sfera su un piano inclinato levigato. Ad esempio, ripetendo l’esperimento di Galileo con un piano inclinato di 5 gradi e lungo 1 m, si ottengono i risultati che seguono.

Dati ottenuti nell’esperimento

L (m) (± 0.01)	t (s) 0.1 kg (±0.1)	t (s) 0.3 kg (±0.1)
0.10	0.5	0.5
0.20	0.7	0.7
0.30	0.9	0.9
0.40	1.0	1.0
0.50	1.2	1.2
0.60	1.3	1.3
0.70	1.4	1.4
0.80	1.5	1.5
0.90	1.6	1.6
1.00	1.7	1.7

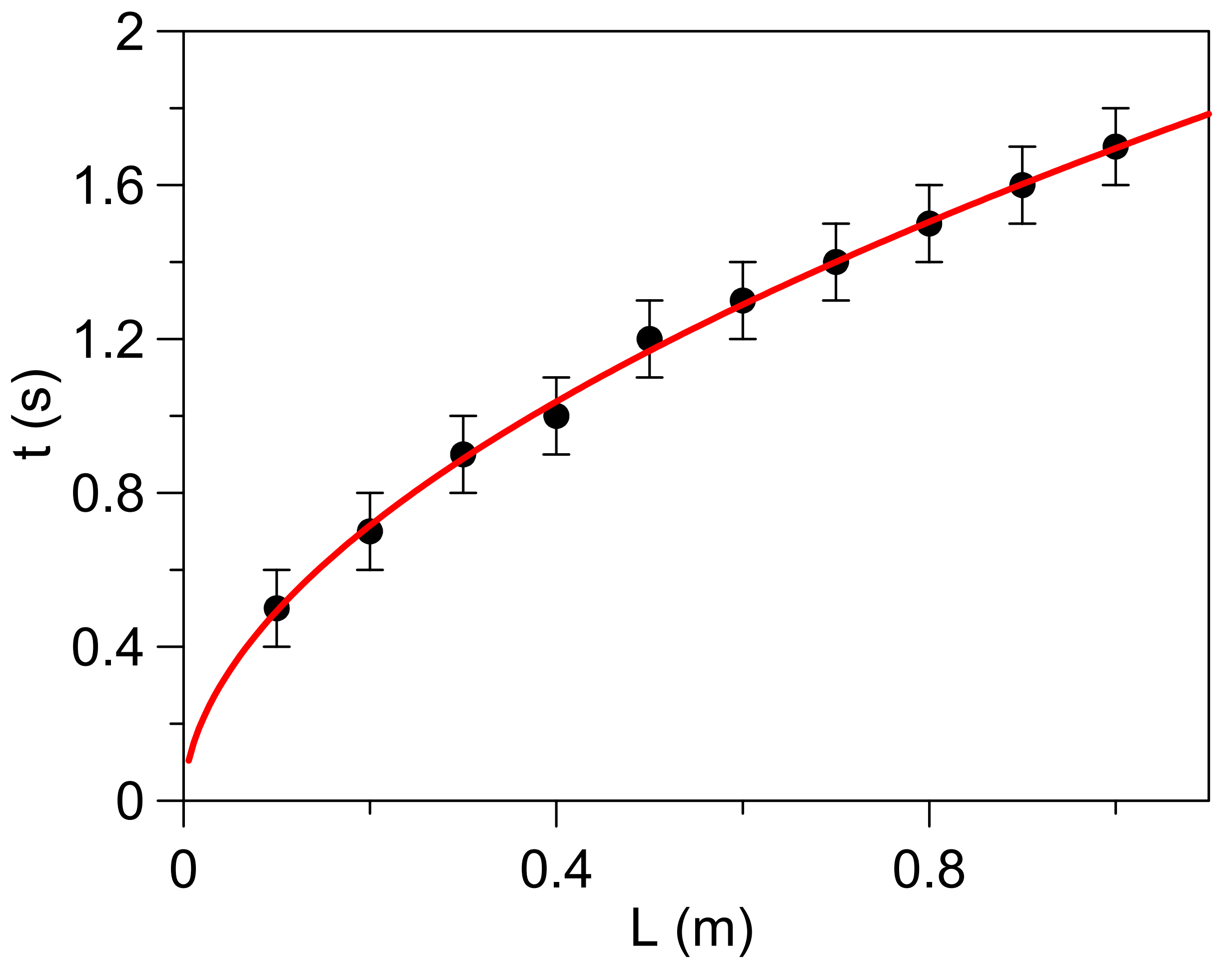
Analizzando i dati si vede esiste una relazione matematica che li descrive
(usando le unità di misura indicate nella tabella).

$$t = (1.7 \pm 0.2) L^{0.5 \pm 0.1}$$

Il risultato si può essere quindi scritto come segue (ignorando l’errore sull’esponente):

$$t = (1.7 \pm 0.2) \sqrt{L}$$

Si assume che i dati possano essere descritti da una relazione di tipo matematico.



Il risultato matematico può essere messo in un’altra forma:

$$L = (0.35 \pm 0.08)t^2$$

L’esperimento ci dice anche che questo risultato non dipende dalla massa del corpo, ma solo dall’inclinazione del piano e dalla sua natura.

Ripetendo l’esperimento possiamo concludere che lo spazio percorso L è proporzionale al quadrato del tempo t trascorso dall’inizio della discesa lungo il piano inclinato.

È opportuno introdurre ulteriori concetti, in gran parte intuitivi, quali velocità e accelerazione.

Velocità

Il concetto è intuitivo, tuttavia la sua definizione corretta è stata introdotta solo da Newton (1643-1727) intorno al 1670.

La definizione operativa di velocità è la seguente: se un corpo percorre lo spazio fra L_1 ed L_2 nel tempo fra t_1 e t_2, la sua velocità (media) è:

$$v = \frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1}$$

Intuitivamente l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$
deve essere il più piccolo possibile,
al limite tendente a zero.
Questa idea porta al concetto di derivata ed alla definizione di velocità.

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{L_2 - L_1}{t_2 - t_1} = \frac{dL}{dt}$$

Un altra grandezza di notevole importanza e di significato intuitivo è l'accelerazione che descrive la variazione della velocità. Essa è definita come la variazione della velocità per unità di tempo:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt}$$

Usando i dati dell'esperimento del piano inclinato si ottiene:

$$L = (0.35 \pm 0.08)t^2$$

$$f(x) = x^n \quad \text{allora} \quad \frac{df}{dx} = nx^{n-1}$$

$$v = (0.35 \pm 0.08)(2t) = (0.70 \pm 0.16)t$$

Dal risultato precedente si conclude con un'importantissima osservazione:

$$a = \frac{dv}{dt} = (0.70 \pm 0.16)$$

Cioè l'accelerazione, nell'esperimento del piano inclinato,

è costante nel tempo.

L’esperimento può essere ripetuto ponendo il piano inclinato in vari punti della superficie della Terra. Il risultato, entro gli errori sperimentali, ***è sempre lo stesso*** entro gli errori. Se ne conclude che la forza di gravità è una costante anch’essa. Questo comportamento ci porta a costruire una relazione che può essere chiamata ***equazione del moto***.

Infatti il fatto che l'accelerazione sia costante in presenza di una forza costante, ci porta a ***assumere*** che: ***l'accelerazione è proporzionale alla forza agente sul corpo***. Questo concetto si esprime in modo formale come segue:

$$F = Ma$$

L’equazione del moto è una relazione che, in linea di principio, permette di determinare l’accelerazione, e quindi la velocità e la posizione, di un corpo, quando si conosca la forza ad esso applicata. Tuttavia essa costituisce, allo stesso tempo, la definizione della forza e della costante *M*, che viene detta massa o quantità di materia.

Dalla tabella dei dati sperimentali, analizzando sia I dati per la massa di 0.1 kg che per la massa di 0.3 kg, si vede che il fenomeno ***non dipende dalla massa***.

Considerata la forma dell'equazione del moto si conclude che la forza di gravità è diretta verso il basso ed è

proporzionale alla massa dei corpi.

$$F = M\,g \qquad g = 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$$

La quantità g è l'accelerazione (costante) con cui i corpi (liberi) cadono.

L’esperimento del piano inclinato è, per costruzione, ***unidimensionale***. Infatti lo spazio percorso viene individuato dalla sola distanza L fra il punto iniziale ed il punto finale. In generale i corpi si muovono nello spazio a 3 dimensioni. La posizione di un corpo viene individuata da 3 distanze da un’origine scelta arbitrariamente, cioè da 3 ***coordinate***.

Quindi la posizione è individuata dalle 3 coordinate (cartesiane) x,y,z, che rappresentano le distanze dall'origine lungo 3 direzioni ortogonali (arbitrarie) che partono dall'origine (assi cartesiani). Nel linguaggio matematico si dice che la posizione, e quindi la velocità l'accelerazione e la forza, sono individuate da ***vettori***.

Quanto detto si scrive nella forma:

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = (Ma_x, Ma_y, Ma_z)$$

L’equazione del moto diventa quindi un’equazione che lega dei vettori:

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = M\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

La seconda relazione viene indicata come ***equazione differenziale***.

Questa equazione consente di risolvere praticamente tutti i problemi relativi ai moti dei corpi, da qui il grande successo dell'approccio di Galileo e poi di Newton che hanno portato ad applicare il metodo di analisi dei dati sperimentali a tutte le scienze.

È un’osservazione comune il fatto che un corpo che urti contro un altro produca delle deformazioni. Questa semplice osservazione ci porta a concludere che, essendo presente, durante la deformazione, un’accelerazione (la velocità diminuisce e quindi varia nel tempo), è presente anche una forza. Se ne deduce che le forze introdotte per descrivere i moti sono anche responsabili delle deformazioni dei corpi.

Si introduce quindi il concetto di corpo elastico:

Un corpo unidimensionale è detto elastico se, applicando una forza F, la deformazione x è proporzionale ad essa.

$$F = Kx$$

Dove la costante K è detta costante elastica. Essa è una proprietà del corpo. Tale proprietà è valida solo se la forza e la deformazione sono piccole

In 3 dimensioni la relazione non è valida in forma semplice, tuttavia, per forze non troppo grandi (questo limite dipende dalla natura dei materiali), esiste una relazione lineare fra forza e deformazione, detta legge di Hooke (1635-1702).

La legge di Hooke è utile in molti settori, essa permette di produrre forze a piacere o, ad esempio, costruire una bilancia, cioè uno strumento atto a misurare la forza di gravità che agisce su un corpo.

Se si studiano le proprietà dell'equazione del moto come equazione differenziale si deducono delle leggi che vengono dette ***regole di conservazione***.

Infatti, in una dimensione, se la forza F si scrive come:

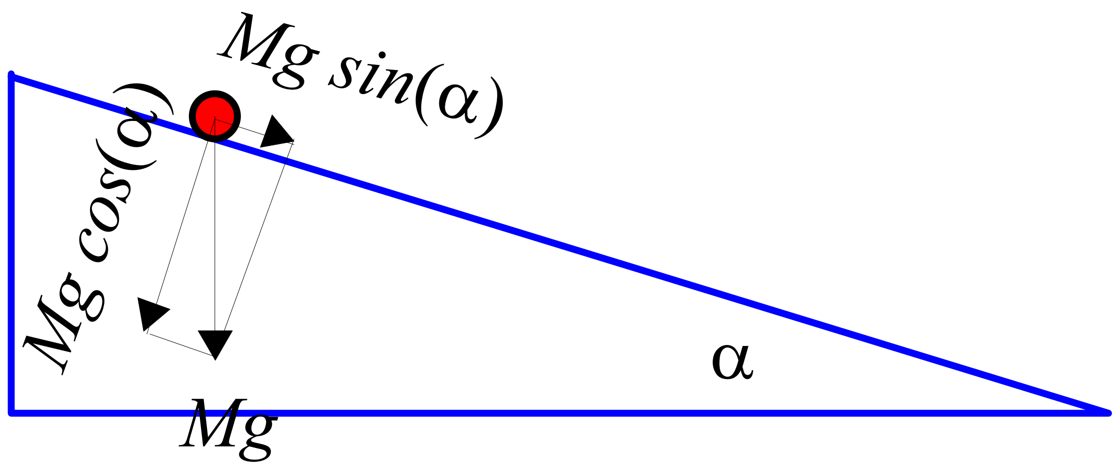
$$F = -\frac{dV}{dx}$$

Ne consegue la
Conservazione dell’energia (meccanica):

$$\frac{1}{2}Mv^2 + V = costante$$

Il primo termine è detto ***energia cinetica***,
mentre il secondo è detto ***energia potenziale***.

È opportuno applicare queste osservazioni al caso del piano inclinato.



L'equazione del moto per il piano inclinato deve tenere conto del fatto che la forza effettiva dipende dall'angolo.

L'energia potenziale della forza lungo il piano inclinato è $Mg\ z$ (z verso l'alto). Se L è la distanza percorsa sul piano, $L = z\ sin(\alpha)$. Si vede che la conservazione dell'energia vale perfettamente. In fatti la forza effettiva è

$$-M\ g\ \sin\alpha.$$

Il segno meno è dovuto al fatto che l'asse z è diretto verso l'alto.

Per esaminare la conservazione dell'energia è necessario confrontare l'energia potenziale all'inizio del moto, quando il corpo si trova all'altezza z con l'energia cinetica dopo un tempo t in fondo al piano inclinato.

$$L = At^2 \quad v = 2At \quad E_{cin} = \frac{Mv^2}{2} = 2MA^2t^2$$

$$V = Mgz = MgAt^2 sin\alpha$$

$$E_{cin} = V \quad 2MA^2t^2 = MgAt^2 sin\alpha$$

$$2A = gsin\alpha$$

È opportuno notare che la conservazione dell'energia si scrive anche come:

$$\Delta T = -\Delta V$$

Dove ΔT è la variazione di energia cinetica e ΔV è la variazione di energia potenziale su un certo percorso.

La grandezza $-\Delta V$ è detta lavoro L effettuato lungo il percorso.

Nel caso unidimensionale il lavoro è dato da:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

In generale si scrive:

$$L = \int_S (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Si ha quindi la seguente conseguenza:

Per far variare l’energia cinetica di un corpo la ***forza deve compiere un lavoro***

dato dalle espressioni precedenti.

La derivazione della conservazione dell'energia è molto semplice se si sfruttano alcune regole su derivazione ed integrazione:

$$M\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{dx} = -\frac{dV}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{dV}{dt}\frac{1}{v}$$

$$Mv\frac{dv}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

$$Mvdv = -dV \qquad M\int vdv = -\int dV$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + V = costante$$

La conservazione dell'energia vale anche in tre dimensioni. In questo caso il vettore forza si scrive:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})$$

Le tre equazioni differenziali si integrano come in precedenza e la conservazione dell'energia è identica

Nota Bene

Come conseguenza di queste relazioni le forze si dividono in due grandi categorie:

a) Forze conservative

b) Forze non conservative

Le forze non conservative sono quelle per le quali ***NON*** esiste una funzione $V(\mathbf{r})$ tale che:

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

Un esempio semplice sono le forze di attrito o dissipative.

Per introdurre le forze di attrito si osserva che l'equazione del moto, in assenza di forze, stabilisce che la velocità è costante.

Questa osservazione va anche sotto il nome di

Principio di Inerzia

Ogni corpo mantiene il suo stato di moto (o di quiete), a meno che non intervengano forze (esterne).

Tuttavia, contrariamente a quanto sembra discendere dal principio d’inerzia, è esperienza comune che, in assenza di forze, un corpo tende a fermarsi. Il fenomeno è chiaramente legato alla natura del luogo dove avviene il moto.

Per mantenere la validità dell’equazione del moto, si assume che esistano delle forze, dette di attrito, fra due oggetti in contatto.

Le forze di attrito sono quindi connesse al fatto che i due corpi siano in contatto. Si possono effettuare dei semplici esperimenti. Ad esempio si applica la forza prodotta da una molla compressa ($F = K\,x$) ad un corpo posto su un piano orizzontale. Si osserva che il corpo si mette in moto se F supera un valore minimo. Tale valore minimo dipende dalla natura del piano e dalla massa del corpo, ma non dalla superficie di appoggio.

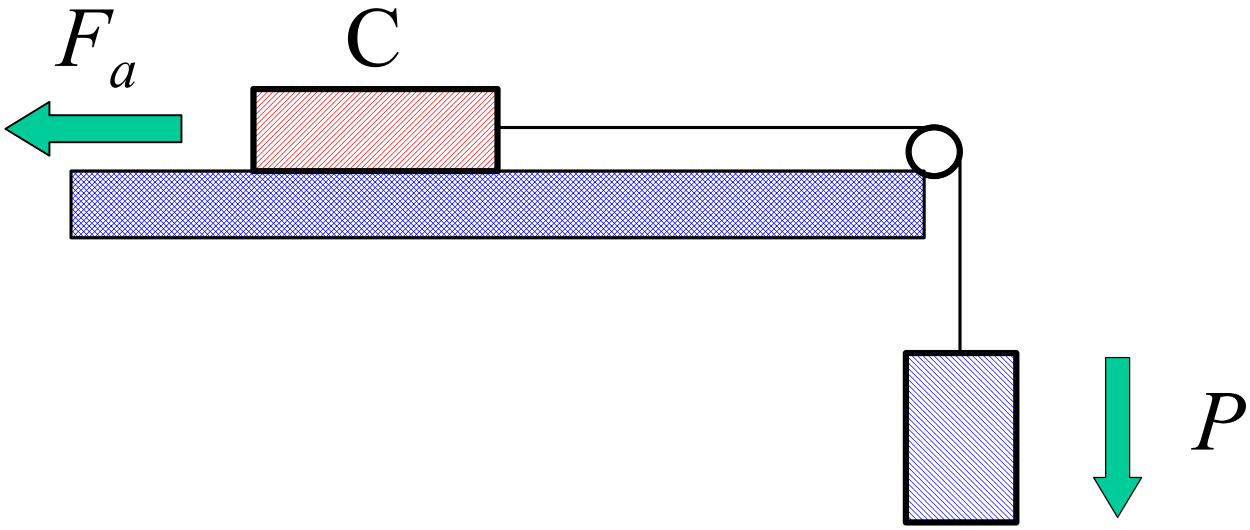
Il valore minimo della forza F necessaria a porre il corpo in moto viene detto forza di attrito (statico) F_a fra i due oggetti. Si ha:

$$F_a = C_a F_c$$

Dove F_a è la forza d'attrito, C_a è il coefficiente d'attrito (che dipende dalla natura dei due materiali) e F_c

è la forza che tende a mantenere uniti i due oggetti. Nell'esempio coincide con la forza di gravità o forza peso.

Le forze di attrito ***NON*** sono conservative, si opponongo ***SEMPRE*** alle forze che tendono a mettere in moto gli oggetti. Questa è un'osservazione semplice che segue da un esperimento della stessa natura di quello del piano inclinato.



Se $F_a > P$ allora il corpo rimane fermo. Appena $F_a < P$ allora il corpo entra in movimento.

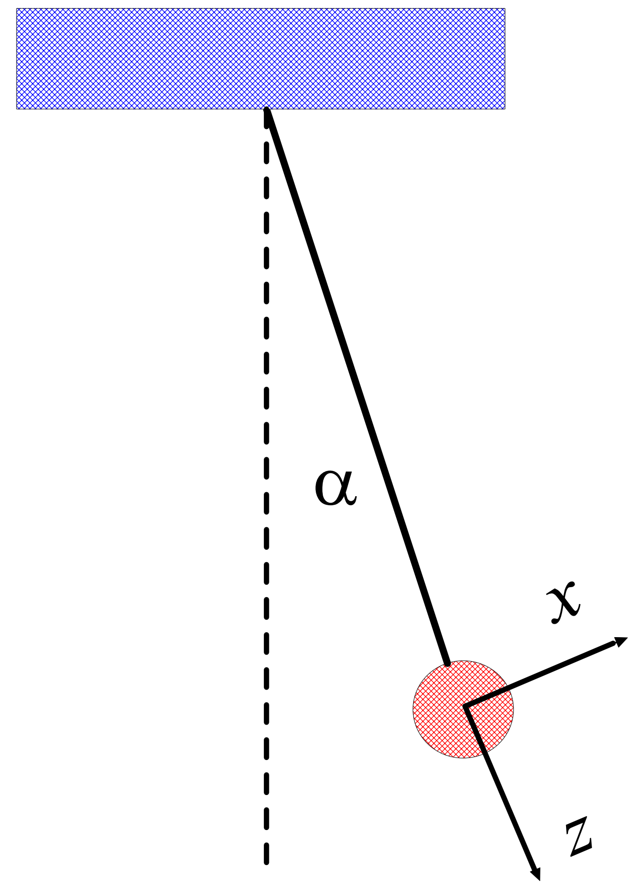
Per definizione F_a (forza di attrito statico) è uguale alla forza peso che è sufficiente a muovere il corpo C.

Lo stesso esperimento permette di stabilire che:

La forza di attrito dinamico è minore di quella di attrito statico.

IL PENDOLO

Questo è un esempio di moto particolare che riveste una grande importanza concettuale. Il pendolo è costituito, idealmente, da un punto materiale di massa *M*, sospeso a distanza *L* per mezzo di un filo non allungabile e privo di massa.



È questo un caso in cui appare una forza particolare oltre alla forza peso. Infatti è presente una ***reazione vincolare***.

Cioè è presente la forza del filo che agisce solo lungo di esso e non trasversalmente ad esso.

Per trattare questa forza conviene proiettare la forza peso lungo il filo e trasversalmente ad esso. La proiezione lungo il filo si annulla con la reazione vincolare del filo stesso.

Con le assunzioni fatte l'equazione del moto è la seguente (piccole oscillazioni del pendolo):

$$\mathbf{F}_{tot} = (-Mgsin(\alpha), 0, 0) \quad \mathbf{r} = (Lsin(\alpha), 0, Lcos(\alpha))$$

$$sin(\alpha) \approx \alpha \quad cos(\alpha) \approx 1$$

$$-Mg\alpha = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = ML\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

Questa equazione si integra facilmente ottenendo il seguente risultato:

$$\alpha = \alpha_0 sin(\omega_0 t) \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

Questo risultato si controlla per semplice sostituzione. Infatti:

$$\frac{dsin(ax)}{dx} = acos(ax) \qquad \frac{dcos(ax)}{dx} = -asin(ax)$$

Da questo risultato si vede che le (piccole) oscillazioni del pendolo sono descritte da una sinusoide. La frequenza di questa sinusoide è:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

La frequenza non dipende dalla massa ma solo dall'accelerazione di gravità e dalla lunghezza del filo.

Il pendolo introduce al primo semplice moto ***periodico***.

Esso rappresenta il primo orologio, ovvero il primo semplice (ma preciso) sistema di misura del tempo. Esso si basa su poche semplici ipotesi che sono coerenti con l’esperimento del piano inclinato.

Ovviamente vale la conservazione dell'energia che consiste in un continuo scambio fra ***energia cinetica*** ed ***energia potenziale***.

$$V = Mgz = Mg(Lcos(\alpha) - L) \simeq MgL\frac{\alpha^2}{2}$$

$$v = \frac{d}{dt}L\alpha = L\omega_0\alpha_0 cos(\omega_0 t) = \alpha_0\sqrt{Lg}cos(\omega_0 t)$$

$$\frac{Mv^2}{2} + V = [\alpha_0 cos(\omega_0 t)]^2\frac{MgL}{2} + \frac{MgL}{2}[\alpha_0 sin(\omega_0 t)]^2 = \frac{MgL\alpha_0^2}{2} = costante$$

Il comportamento del pendolo dedotto in precedenza va considerato

ideale.

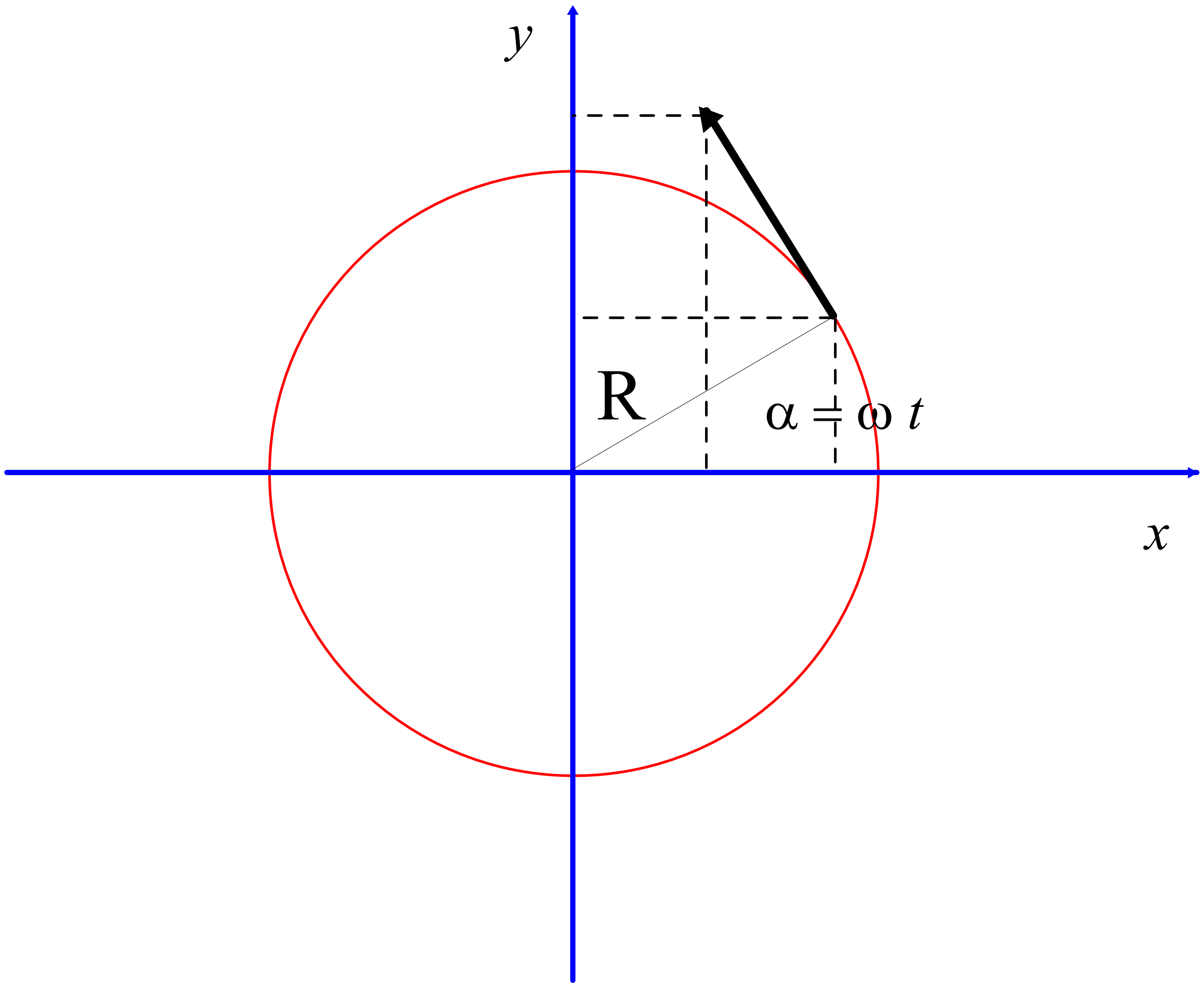
Infatti, in una situazione reale va considerato anche l'effetto delle forze ***dissipative***.

Le forze ***dissipative*** si comportano come se non valesse la conservazione dell'energia.

L'energia meccanica diminuisce progressivamente ed il pendolo smette progressivamente di oscillare.

L’equazione del moto permette anche di osservare la presenza di forze non evidenti immediatamente. Infatti (M **a**) si comporta come una forza. Ad esempio, un corpo legato ad un filo ideale viene fatto ruotare, ***a velocità costante***, a distanza fissa da un punto immobile. Anche questo moto è ***periodico*** come quello del pendolo. Apparentemente non è presente alcuna accelerazione.

Conviene effettuare un calcolo secondo la definizione:



$$v_x = -v_0 sin(\omega t)$$

$$v_y = v_0 cos(\omega t)$$

Effettuando la derivata della velocità si ottiene:

$$a_x = -\frac{dv_0 sin(\omega t)}{dt} = -v_0 \omega cos(\omega t)$$

$$a_y = \frac{dv_0 cos(\omega t)}{dt} = -v_0 \omega sin(\omega t)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = v_0 \omega = \frac{v_0^2}{R} = \omega^2 R$$

Come si vede l'accelerazione è diversa da zero, sebbene il modulo della velocità sia costante. L'accelerazione, che è diretta verso il centro, viene detta

accelerazione centripeta.

Essa è prodotta da una forza centripeta che è quella dovuta al filo:

$$F_{cp} = M\frac{v_0^2}{R} = M\omega^2 R$$

Va osservato che la forza centripeta essendo sempre diretta verso il centro è

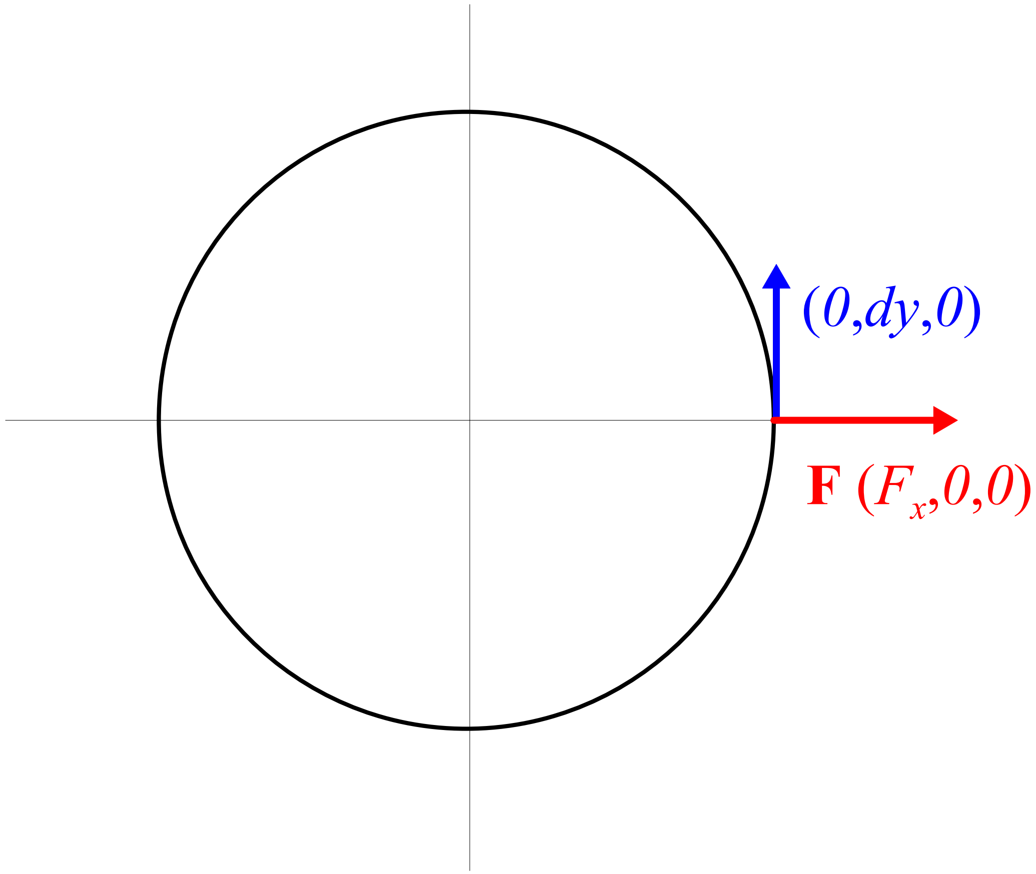
perpendicolare

Alla direzione del moto che avviene lungo la circonferenza. La conseguenza immediata è che:

La forza centripeta

non compie lavoro

ed infatti l'energia cinetica non varia.



$$L = \int_s (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

L’equazione del moto si scrive anche:

$$\mathbf{F} - M\,\mathbf{a} = 0$$

Conviene quindi introdurre una forza (dovuta alla massa o inerzia) pari a:

$$-M\,\mathbf{a}$$

Questa è una forza che, di fatto, si oppone al moto. Nel caso di un moto circolare questa forza è detta ***centrifuga***.

Dal moto circolare si ottiene una nuova regola di conservazione. Si consideri il caso di un corpo di massa *m* che ruota collegato ad un filo che fissa il raggio *r* di rotazione. Se il filo viene lasciato scorrere si ha che la forza centripeta compie un lavoro a cui corrisponde una variazione di energia cinetica. Si ha:

$$dT = \frac{m2v}{2}dv \quad dL = -\frac{mv^2}{r}dr$$

$$dT = dL \quad mvdv = -\frac{mv^2}{r}dr \quad m\frac{dv}{v} = -m\frac{dr}{r}$$

Integrando l'equazione si ha:

$$[log(v_2) - log(v_1)] = [log(r_1) - log(r_2)]$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad v_2 r_2 = v_1 r_1$$

Da questa relazione si ottiene la seguente regola di conservazione:

$$mvr = cost$$

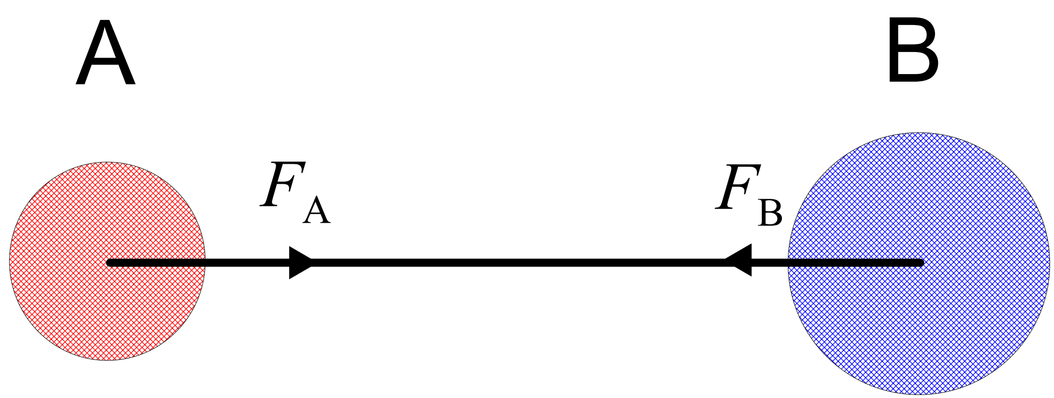
La grandezza al primo membro è detta momento angolare. Nel moto circolare uniforme il momento angolare si conserva e rimane costante al variare delle varie grandezza in gioco, se non ci sono forze longitudinali.

Per discutere il moto di sistemi di punti materiali e di corpi (rigidi) estesi, si assume che la legge del moto valga anche per questi casi, con le opportune modifiche. Per un sistema di N punti materiali di massa M_i, soggetto, ognuno ad una forza $\mathbf{F}_i$, l'equazione del moto si scrive:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{a}_i$$

Questa equazione è simile a quella di un solo punto materiale, tuttavia le sue soluzioni possono essere molto complesse e danno luogo ad una miriade di moti differenti.

È interessante fare riferimento al caso di due corpi fra i quali agisca una forza (ad esempio una forza magnetica).



Questo semplice esempio fa vedere che dal punto di vista di A c'è una forza F_A che agisce su di esso, mentre dal punto di vista di B c'è una forza F_B esattamente uguale ed opposta. Questa osservazione permette di comprendere che le forze che si hanno ***fra*** corpi si

sommano sempre a zero.

In pratica questo è un semplice modo per enunciare il terzo principio della dinamica.

Facendo quindi riferimento all'equazione che regola il moto di molti corpi, si vede che, se non ci sono forze che agiscono dall'esterno dell'insieme di corpi considerati, cioè forze che non siano dovute agli N corpi di masse M_i, allora:

$$\sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{a}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{R}$$

L'ultimo termine introduce il baricentro o centro delle masse. La sua posizione è definita da:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} M_i}$$

Ancora una volta l'uso delle modifiche algebriche permette delle conclusioni sul comportamento dei sistemi in natura.

Se un sistema composto da N corpi non è soggetto a forze esterne, allora si ha la seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{N} M_i \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} M_i \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{P} = cost$$

La grandezza P è detta quantità di moto del sistema.

La quantità di moto di un sistema è anche uguale alla somma di tanti contributi, che vengono identificati come la quantità di moto di ogni singolo componente.

$$\sum_{i=1}^{N} M_i \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} M_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$$

Alcune relazioni per i moti più semplici.

Moto uniformemente accelerato unidimensionale

$a = cost \qquad v = v_0 + a\,t \qquad x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$

v_0 è la velocità ed x_0 è la posizione del punto all'istante iniziale $t=0$. Le relazioni valgono per qualunque valore dei parametri, sia per valori ***positivi*** che ***negativi***.

Moto circolare uniforme

$\omega = cost$

$v = \omega R \qquad l = l_0 + \omega R\, t \qquad a_c = \omega^2 R = \omega^2/R$

ω è la velocità angolare, *R* è il raggio del cerchio, *l* è la coordinata lungo la circonferenza, l_0 è la posizione all'istante $t=0$, a_c è l'accelerazione centripeta.