

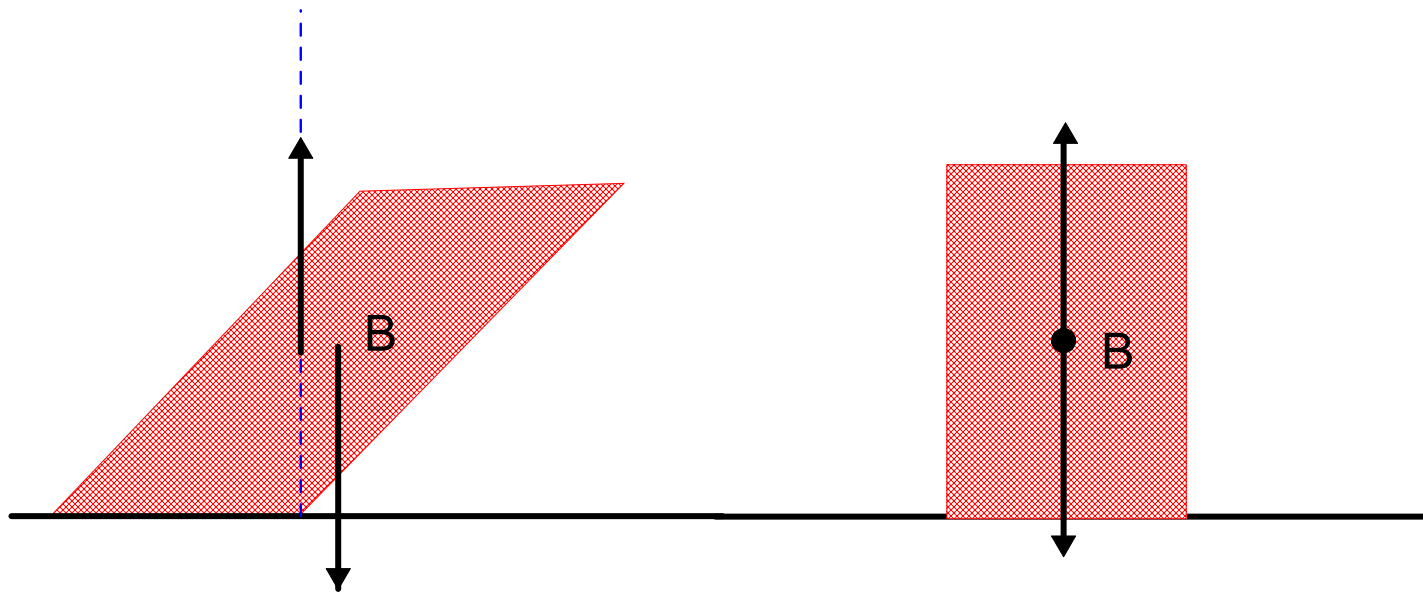
Statica ed equilibrio dei corpi

Avendo stabilito le leggi che regolano il moto dei corpi è possibile dedurre le leggi che regolano il loro equilibrio in condizioni statiche, cioè in assenza di movimento.

In linea di principio un corpo non soggetto a forze ed inizialmente fermo non modifica la sua posizione. Tuttavia l'assenza di forze deve essere totale, quindi devono essere incluse anche le forze che si presentano come reazioni vincolari.

L'equilibrio di un corpo si ottiene quando la somma delle forze applicate ad ogni suo punto è nulla. In un corpo esteso è possibile analizzare le forze applicate al suo baricentro.

Due situazioni diverse possono essere le seguenti, relativamente a due corpi rigidi appoggiati su un piano orizzontale.



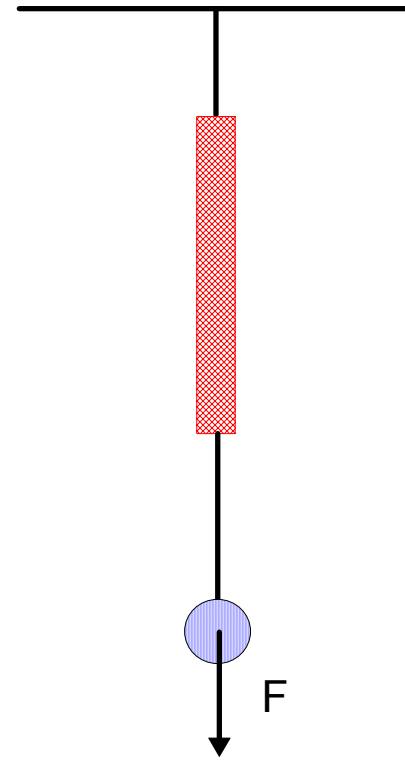
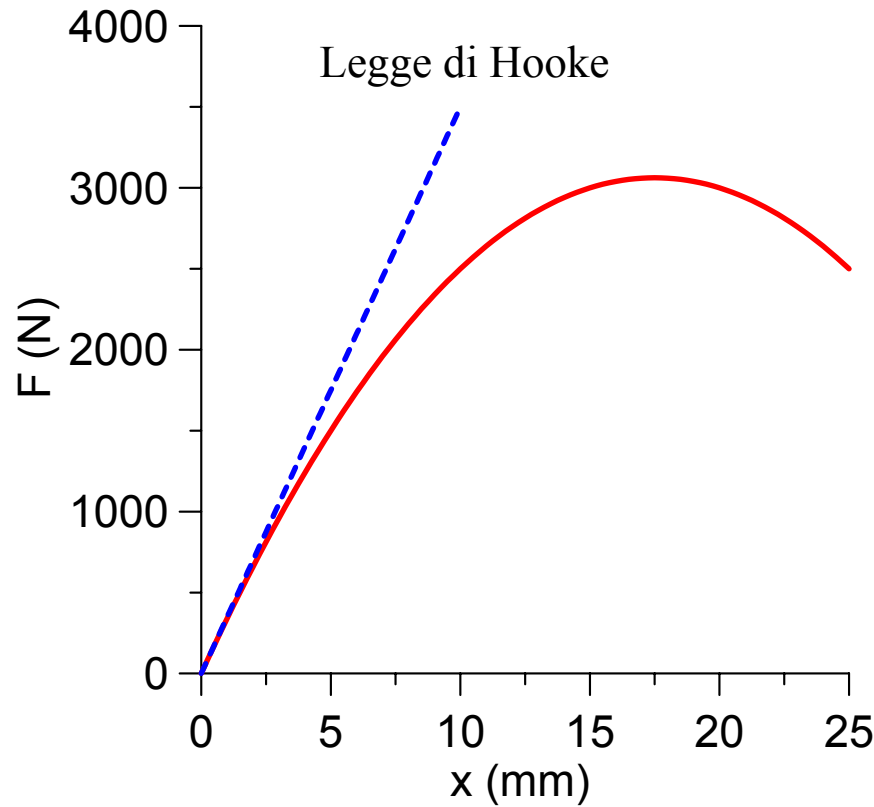
Forza non nulla

Forza nulla

Nel primo caso l'accelerazione che viene impartita ad una parte del corpo è diversa da quella che viene impartita all'altra parte, quindi il corpo viene immediatamente a trovarsi in un moto complesso.

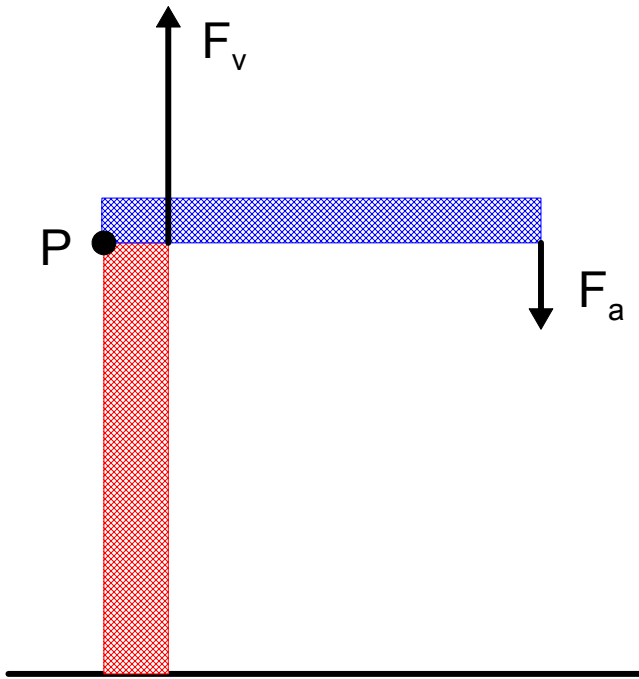
In natura non esistono corpi realmente rigidi.

L'applicazione delle forze produce deformazioni che seguono la legge di Hooke quando le forze sono piccole.



Il corpo cilindrico soggetto alla trazione di un peso sempre crescente, prima si allunga secondo la legge di Hooke, poi si deforma e si rompe.

Per evitare la rottura i corpi non devono essere sollecitati oltre il limite della legge di Hooke (limite elastico).



La forza F_a applicata deve essere contrastata dalla forza F_v . Si ha equilibrio se il lavoro della forza F_a è uguale a quello della forza F_v , quando il movimento è la deformazione nei due punti. Le due deformazioni sono proporzionali alle distanze dal punto di rotazione P. La forza F_v risulta molto maggiore della forza F_a .

Le leggi della statica che definiscono le deformazioni dei corpi sono essenziali nel descrivere anche la forma e molte delle caratteristiche degli esseri viventi.

Tuttavia gli esseri viventi hanno spesso strutture composite, costituite di parti rigide che seguono la legge di Hooke e parti fluide, che sono descrivibili con altre leggi.

Statica e dinamica dei fluidi

I fluidi sono una particolare categoria di sistemi per i quali è necessario sviluppare delle considerazioni differenti.

Sono classificabili come fluidi i liquidi ed i gas. La distinzione fra queste due categorie non è netta in quanto si passa con continuità dall'uno all'altro.

La distinzione viene quindi fatta in modo chiaro solo fra solidi e fluidi.

Convenzionalmente si dice che i sistemi solidi sono definiti da una forma fissa. Andrebbe precisato anche *per quanto tempo*. Esistono infatti sistemi apparentemente solidi che non lo sono strettamente in quanto la loro forma varia su una scala temporale molto lunga (mesi, anni, secoli ed oltre). Essi sono detti *vetri*. Hanno un comportamento vetroso anche materiali come i polimeri e molti altri.

Il primo concetto relativamente nuovo nello studio dei fluidi è la

Pressione.

La pressione viene definita anche per un corpo solido in contatto con un altro su una superficie S . La pressione viene definita come la forza che tiene in contatto i due corpi, divisa per la superficie di contatto:

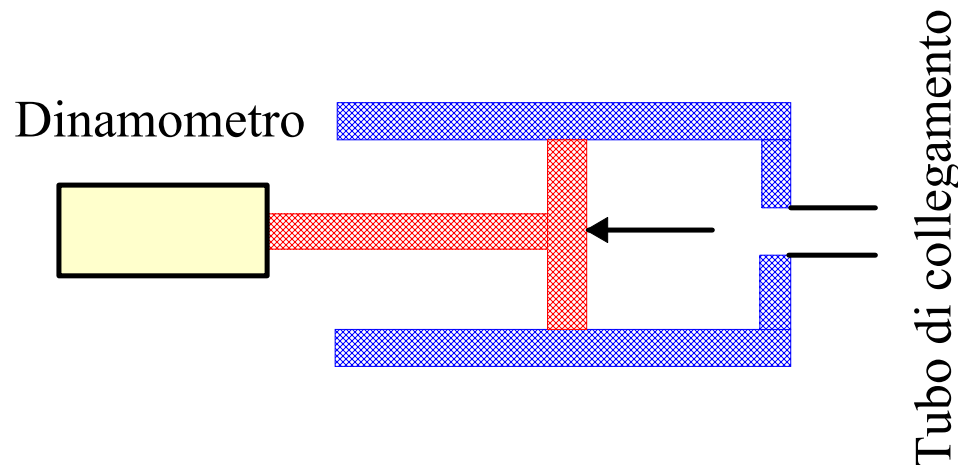
$$P = F/S$$

Nel caso di un fluido la definizione è la stessa.

Si assuma di avere un fluido in un contenitore ed in condizioni statiche. Allora la pressione su un elemento di superficie ΔS è:

$$P = F/\Delta S$$

La definizione suggerisce un mezzo operativo per la misura della pressione.



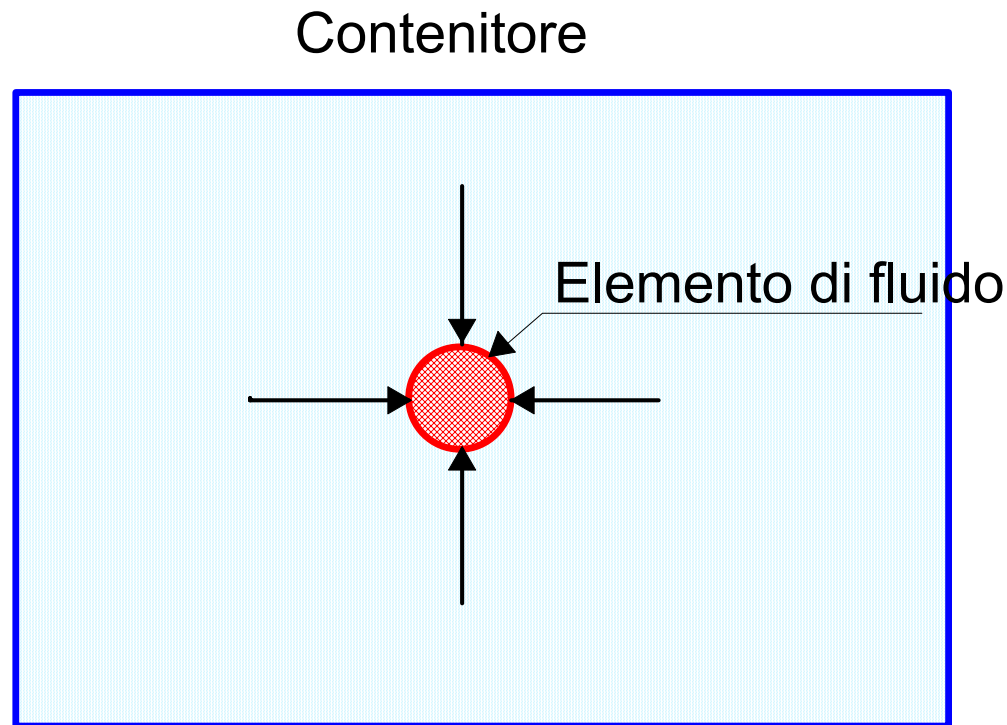
Ovviamente questa è la tecnica di misura di principio. Esistono sistemi sofisticati per misurare pressioni sia molto basse che molto alte. Ad esempio, le pressioni maggiori raggiungibili (attualmente) sono di circa 300 GPa, mentre le pressioni minime, cioè il vuoto migliore ottenibile è di circa 1 fPa.

I fluidi sono in genere omogenei, questa caratteristica ne controlla il comportamento.

In condizioni di equilibrio, cioè in assenza di moti, la pressione in un fluido è uguale in tutti i suoi punti (assumendo che non ci sia la forza di gravità). La pressione presente nel fluido è detta *pressione idrostatica*.

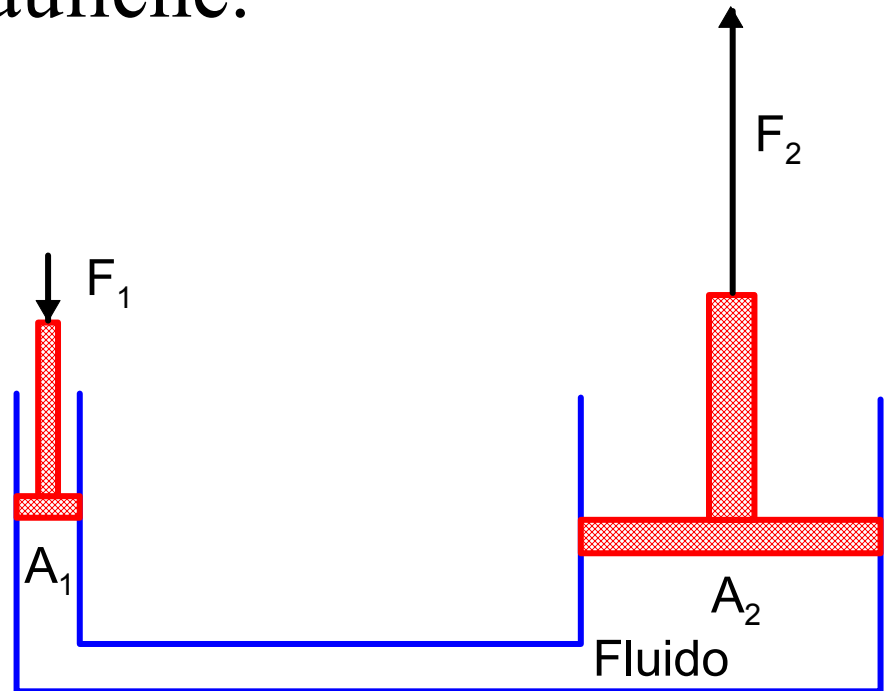
Il fatto che la pressione idrostatica sia uguale in ogni punto del fluido consegue dalla legge del moto: all'equilibrio ogni elemento di fluido non è soggetto a forze, cioè la somma delle forze è nulla.

Lo schema di annullamento delle forze è molto semplice e dimostra l'uniformità della pressione nel fluido.



L'uniformità della pressione all'interno del fluido ha delle notevoli conseguenze. Infatti la pressione esercitata sulle pareti del contenitore è la stessa ovunque. Una semplice applicazione di questa osservazione sono le movimentazioni idrauliche.

$$F_1/A_1 = F_2/A_2 = P$$



È importante notare l'effetto della gravità su un fluido. Infatti la forza di gravità produce una pressione sulle pareti del contenitore. La pressione maggiore si esercita sul fondo del contenitore. Tuttavia è presente una pressione anche sulle pareti laterali, vicino al fondo, a causa del fatto che la pressione nel liquido è uniforme.

La pressione esercitata dipende dall'altezza del liquido dal fondo.

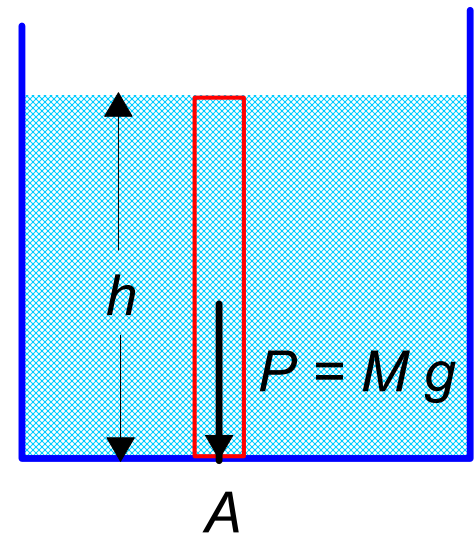
La forza dovuta alla gravità è $M g$, la pressione è quindi:

$$P = M g / A$$

$$\text{Ma } M = \rho V = \rho A h$$

Quindi :

$$P = \rho g h$$



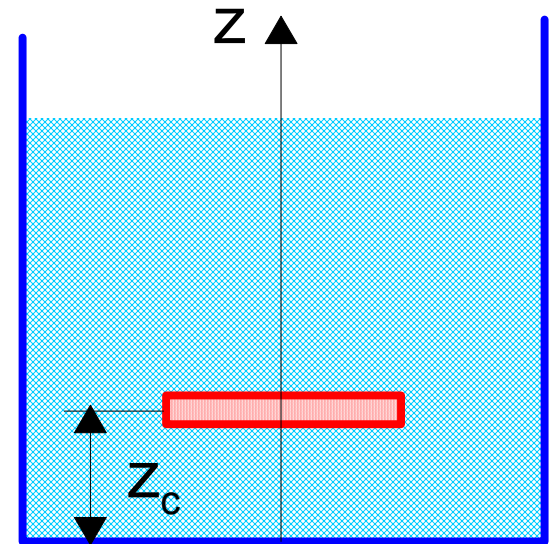
Le regole descritte sono tutte conseguenze della legge del moto dedotta inizialmente per i punti materiali.

Sempre dalle regole introdotte per il moto dei corpi si deriva la legge nota come principio di Archimede, per il quale si afferma che i corpi immersi nei fluidi sono soggetti a forze che dipendono dalla densità. Questo principio si deriva facilmente calcolando l'energia potenziale del sistema totale.

L'energia potenziale è data da quella totale del fluido, a cui va sommata quella del corpo in esso immerso e tolta quella del fluido che si troverebbe dove si trova il corpo se questo non ci fosse. Va ricordato che l'energia potenziale di un corpo di massa M nella forza di gravità è:

$$M g z$$

Si fa riferimento alla figura.



Se V_0 è l'energia potenziale del fluido in assenza del corpo, con il corpo si ha:

$$V_{tot} = V_0 - M_f g z_c + M_c g z_c$$

M_f e M_c sono le masse del fluido e del corpo.

Usando la relazione fra forza ed energia potenziale ($F_c = - dV_{tot}/dz_c$) si vede che il corpo è soggetto ad una forza pari a:

$$F_c = M_f g - M_c g$$

Questa forza è positiva e quindi diretta verso l'alto se $M_f > M_c$.

Sfruttando la relazione fra densità e volume si ottiene:

$$F_c = (\rho_f - \rho_c) V_c g$$

Il moto dei fluidi è, in generale, un fenomeno complesso. Tuttavia è possibile enunciare un concetto generale che è di grande aiuto per comprendere i meccanismi che regolano questo tipo di fenomeni. La regola generale viene indicata come

Teorema di Bernoulli (Daniel Bernoulli 1700-1782). Questo discende dalla conservazione dell'energia ed, in parte, dall'uso del *calcolo* di Leibniz (1646-1716). Il risultato segue il suo lavoro con Johan Bernoulli (padre 1667-1748) sulla conservazione dell'energia di Newton.

Va ricordato che molti fluidi possono essere considerati praticamente incomprimibili. Questo vuol dire che applicando una pressione il volume varia in modo trascurabile. Una conseguenza di questo è un principio di conservazione detto di continuità. Volumi uguali di fluido, contengono la stessa massa, anche a pressioni diverse.

Se un fluido fluisce in un condotto completamente riempito, allora il *flusso* è costante in ogni punto del condotto.



Si definisce il flusso:

$$\Phi = \rho S v$$

La conservazione dei volumi permette di stabilire una regola sulla variazione della velocità lungo i condotti:

$$V_1 = S_1 \Delta x_1 = V_2 = S_2 \Delta x_2$$

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t \quad \Delta x_2 = v_2 \Delta t$$

Il confronto fra le varie relazioni permette di stabilire la regola cercata. Questa regola è equivalente alla conservazione del flusso.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

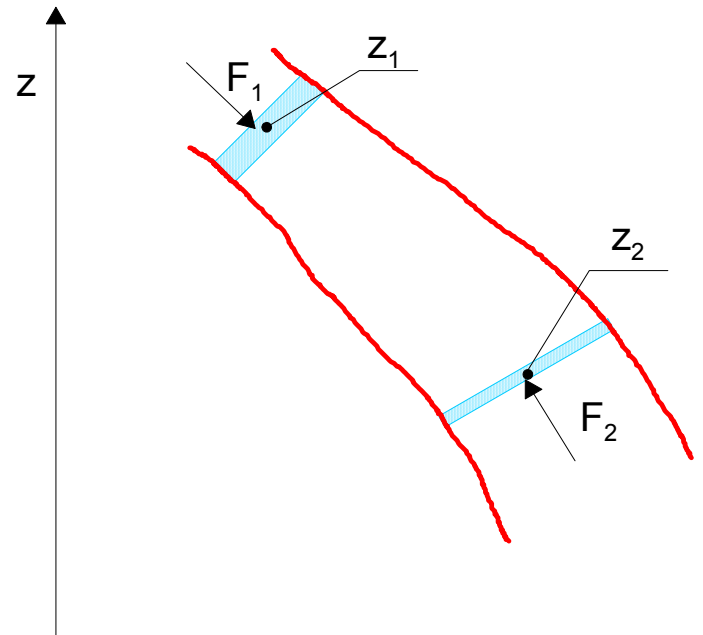
$$\Phi_1 = \rho S_1 v_1 = \Phi_2 = \rho S_2 v_2$$

Ovvero, dove la sezione è piccola la velocità è grande e viceversa. Sfruttando questa conservazione e quella dell'energia segue il teorema di Bernoulli.

Facendo riferimento alla figura, assumendo che la densità del fluido sia costante (fluido incomprimibile) e che non ci sia dissipazione di energia, si ricava la seguente legge:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{costante}$$

Si studia il moto di un volume piccolo costante dV che contiene la massa $dm = \rho dV$



La conservazione dell'energia stabilisce che il lavoro delle forze è uguale alla *variazione* di energia cinetica.

$$dL = dm g(z_2 - z_1) + F_1 ds_1 - F_2 ds_2$$

$$dT = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

$$F_1 ds_1 - F_2 ds_2 = p_1 S_1 ds_1 + p_2 S_2 ds_2 = (p_1 - p_2) dV$$

$$dm = \rho dV$$

Il teorema di Bernoulli, che discende direttamente dalla conservazione dell'energia, stabilita direttamente dall'equazione del moto, permette di evidenziare un fatto di grande importanza: un fluido che scorre in un condotto tende ad avere velocità alta nelle zone dove la pressione è bassa. Se il condotto si restringe, la velocità tende ad aumentare e la pressione diminuisce. Questo significa che, a monte delle strettoie la pressione è alta.