Perugia 30.11.2008

Materiale per il corso di elettrodinamica classica, anno 2008-2009.

1. unità di misura, eq. di Maxwell nelle diverse unità. Identità vettoriali, Uso della teoria delle distribuzioni. Il concetto di spettro di potenza. Coordinate curvilinee ortogonali.
2. Elettrostatica: equazioni di Poisson e Laplace, teorema di Green, condizioni al contorno di Dirichlet e Neumann, teorema di unicità; funzioni di Green, metodo delle immagini, carica puntiforme in presenza di una sfera conduttrice (a $V = 0$, isolata e carica, a potenziale fisso).

   Separazione delle variabili; esempio di filo carico tra due piani conduttori; armoniche sferiche, sviluppo in multipoli; potenziale di un anello carico; sfera di dielettrico in un campo elettrico uniforme; funzioni di Bessel, campo di una carica puntiforme sull'asse di un cilindro conduttore.
3. Derivazione delle leggi del magnetismo; i campi elettrici e magnetici nella materia; cenno alla teoria di Landau. Magneti di tipo 'dipolo' e 'quadrupolo'.

4.0 Potenziali elettromagnetici. La scelta del gauge. I potenziali e.m. in meccanica quantistica, la sostituzione minimale. L'effetto Aharanov-Bohm, la carica del monopolo. Superconduttività ed effetto Meissner.

4.1 Il peso relativo del termine di Maxwell; richiamo sulle onde piane; il teorema di Poynting, il tensore di Maxwell, pressione di radiazione.

4.2 cenni di magnetoidrodinamica: il confinamento del flusso magnetico, le onde di Alfven.

4.3 Onde elettromagnetiche in presenza di superfici metalliche, effetto pelle.
Guide d'onda, cavità risonanti, modi di propagazione; cavi coassiali.

4.4 Emissione di onde elettromagnetiche; la formula di Kirchoff; la teoria (scalare) della diffrazione; i potenziali ritardati, la formula del dipolo.
Esempi: onda e.m. su una carica libera, diffusione e sezioni d'urto di Thompson; radiazione da un'antenna; il collasso classico dell'atomo di idrogeno; diffusione da una sfera di dielettrico, sezione d'urto di Raleigh; diffusione da dipoli elettrici, l'azzurro del cielo e la determinazione di Raleigh del numero di Avogadro.
Sviluppo in multipoli del campo radiativo.

5.0 Formulazione covariante dell'elettromagnetismo; leggi di trasformazione classiche dei campi e.m. e loro inconsistenza; lo spazio di Minkowski e il formalismo covariante, quadrivelocità e quadriimpulso. Le equazioni dell'elettromagnetismo in forma covariante; la quadricorrente di una carica puntiforme. Il tensore energia-impulso (Weinberg), esempio di fluido carico. Il formalismo lagrangeano.

5.1 Il campo di una carica in movimento (potenziali di Liénard-Wiechert); il caso β parallelo a $\dot{\beta}$; il caso β ortogonale a $\dot{\beta}$, la luce di sincrotrone e il suo spettro.

6. I coefficienti A e B di Einstein, emissione stimolata, laser.

Spero che questa dispensa, che non sostituisce i libri di testo (per es. [1] [2] [3] [4] [5], sia utile come traccia nello studio. La base è [2], un volume di 800 pagine; ho fatto quello che ho potuto. Ho anche tentato di renderla un po' meno oscura delle versioni precedenti, ma sarei sempre grato a chi mi segnalasse errori, omissioni, incongruenze, oscurità localizzate; ne trovo in abbondanza ogni volta che le riguardo. In generale ho tentato di infilarci dentro più fisica possibile, anche non strettamente pertinente al titolo del corso; ammetto che il riscontro sperimentale è piuttosto scarso.

Un commento sui testi. I classici sono [2] e [4], molto diversi in stile, ma per diversi motivi monumentali; usati da decenni per torturare gli studenti al primo anno di PhD a ovest e a est. Sono libri di riferimento universalmente citati. Di recente ho letto [3], che è diventato molto popolare negli Stati Uniti, e mi è sembrato ottimo per studiare, veramente un buon libro di testo. Parte da zero su tutti gli argomenti, e ha molti esercizi di livello umano (=per lo più li saprei fare). A me piace [5], ma forse solo perché lo conosco più degli altri. Comunque, prima di comprare, consultare, per esempio chiedendomeli in prestito.

1. Unità di misura, etc.

Questo argomento è noioso, ma inevitabile: ci sono tre sistemi di unità in uso in elettromagnetismo: la forma delle leggi è diversa nei tre sistemi, e sarebbe ipocrita dire che è sempre facile passare dall'uno all'altro. Devo aggiungere che questa dispensa è in parte un collage di vecchi appunti, e non uso sempre lo stesso sistema di unità. Riporto qui di seguito le principali equazioni scritte nei tre sistemi.

Il sistema MKS, con il suo corredo di ϵ_0 e μ_0, è quello usato nei corsi di fisica generale per es.[1], in [5], e nelle prossime sezioni. Non so quante migliaia di volte ho scritto $4\pi\epsilon_0$, e certo negli sviluppi teorici diventa uno strazio; però le unità sono le più comode da usare. Abbiamo per il campo di una carica puntiforme $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{x}|^2}\hat{\mathbf{x}}$, e:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}\ , \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})\ , \quad \mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) \\
\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho\ , \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0\ , \quad \nabla\wedge\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\ , \quad \nabla\wedge\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\
\rho_{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\ , \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{E}\wedge\mathbf{H}\ , \quad \frac{\partial\rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{\Pi} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\ , \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

e poi $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \simeq 2.991\ 10^8$ m/s, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377.\ \Omega$. Nell'ultima riga ho incluso il teorema di Poynting, che vedremo.

Il sistema di Gauss (cgs) è usato dagli elettromagnetici 'puri' (per es. [2]), in [4], e in generale in fisica atomica. Spariscono ϵ_0 e μ_0, quindi nel vuoto $\mathbf{E} = \mathbf{D}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, tutti i campi hanno le stesse dimensioni, il campo di Coulomb è $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \frac{q}{|\mathbf{x}|^2}$, e:

$$\begin{gathered}
\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \ , \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \ , \quad \mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \\
\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \ , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ , \quad \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
\rho_{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} \ , \ \mathbf{\Pi} = c\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}}{4\pi} \ , \ \frac{\partial \rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -\frac{1}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \ , \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Il sistema di Heavyside-Lorentz (cgs razionalizzato) viene sempre usato in teoria dei campi e in fisica delle particelle. Come sopra, ma il campo di Coulomb è $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{|\mathbf{x}|^2} \hat{\mathbf{x}}$; Le formule scritte in MKS possono (spesso) essere convertite con le sostituzioni:

$$\epsilon_0 \longrightarrow 1 \ ; \qquad \mathbf{B} \longrightarrow \frac{\mathbf{B}}{c} \ ; \qquad \mu_0 \longrightarrow \frac{1}{c^2}$$

Per esempio:

$$\begin{gathered}
\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P} \ , \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \\
\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \ , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ , \quad \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\
\rho_{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \ , \quad \mathbf{\Pi} = c\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \ , \ \frac{\partial \rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -\frac{1}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \ , \ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Nel resto di questa dispensa userò per lo più M.K.S., passando a H.L. erraticamente. Il motivo per cui uso malvolentieri Gauss e H.L. è la fatica a tenere conto delle dimensioni e degli ordini di grandezza. Dalla legge di Coulomb si desume che la carica ha dimensioni $m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$, ma poi bisogna passare a cm-g-s, e fare attenzione a distinguere Gauss da H.L.; le tabelle danno sempre le costanti nel sistema di Gauss, e l'unità di carica si chiama 'esu'. Dalla legge di Coulomb per $r = 1\,\mathrm{m}$, siccome 1 N=10^5 dyne e $(4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9\,10^9$:

$$9. \cdot 10^9 \frac{q(C)^2}{1} 10^5 = \frac{q(esu)^2}{10^4} \ \rightarrow \ 3. \cdot 10^9 q(C) = q(esu)$$

per es. $e = 4.83 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{esu}$.

L'unità di lunghezza appropriata alla fisica atomica è l'Ångstrom, $1\,\AA = 10^{-10}\,m$. Analogamente in fisica nucleare e delle particelle si usa il *Fermi*, $1\,f = 10^{-15}\,m$; però l'unità più comune per superfici (sezioni d'urto) è il *barn* (='stalla'), $1\,b = 10^{-28}\,m^2 = 100\,f^2$ (inventata per scherzo da Fermi per spiegare quanto fossero enormi le sezioni d'urto dei neutroni di bassa energia); l'unità di energia è l'eV e i suoi multipli; prendendo poi $\hbar = c = 1$, il fattore di conversione fondamentale è :

$$\hbar c = 197.3\,MeV\,f \tag{1.4}$$

Esempio: La lunghezza d'onda Compton di una particella è definita come $\lambda_c := \frac{\hbar}{mc}$. Quindi se per il mesone π^+ ho $m_{\pi^+} = 139.6\, MeV/c^2$, $\lambda_{\pi^+} = \frac{197.3}{139.6} = 1.4\, f$.

E ancora: il raggio classico dell'elettrone, che ha massa $m_e = 0.511$ MeV/c^2, sarà dato (in H.L.) da:

$$r_e := \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{m_e c^2} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}\lambda_e := \alpha\lambda_e = \frac{1}{137.}\lambda_e \simeq \frac{1}{137.}\frac{197.3}{0.511}\, 10^{-15} \simeq 2.82\, 10^{-15}\, m$$

$\alpha = \frac{1}{137.}$ è adimesionale, e viene chiamata la "costante di struttura fina" elettrodinamica.

L'altra costante fondamentale (che però non comparirà in questo corso) è la costante di Newton $G = 6.673 \cdot 10^{-11}\, m^2 kg^{-1} s^{-1}$. Combinandola con $\hbar$, c, otteniamo la "massa di Planck":

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.177 \cdot 10^{-8}\, kg = \frac{2.177 \cdot 10^{-8}(2.998 \cdot 10^8)^2}{10^9 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}}\, GeV/c^2 = 1.221 \cdot 10^{19}\, GeV/c^2$$

e la corrispondente "lunghezza di Planck",

$$l_P = \frac{\hbar}{m_P c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = \frac{197.3 \cdot 10^{-3}}{1.221 \cdot 10^{19}}\, f = 1.616 \cdot 10^{-20}\, f$$

In teoria della stringa e dintorni sono molto popolari i sistemi materiali detti BPS (Bogomolnyi -Prasad-Sommerfield); nel caso più semplice, insiemi di particelle ideali per es. con carica positiva tale che $Gm^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q^2$, i.e. tali che la repulsione coulombiana cancella l'attrazione gravitazionale. Per es. se $q = e$, $m = 1.60 \cdot 10^{-19}\sqrt{\frac{9 \cdot 10^9}{6.67 \cdot 10^{-11}}} = 1.86 \cdot 10^{-9}$ kg $\simeq 1.12 \cdot 10^{17}$ masse di protone.

Preliminari matematici

In questa dispensa do per acquisita una certa destrezza nell'uso dei teoremi integrali:

$$\int_a^b \nabla\psi \cdot d\mathbf{s} = \psi(b) - \psi(a); \qquad \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{A}\, d^3\mathbf{x} = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}; \qquad \int_S \nabla \wedge \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} \quad (1.5)$$

(ma per lo più scrivo $\partial\mathcal{V}$= superficie che borda il volume $\mathcal{V}$, e ∂S= linea che borda la superficie S; fa più fine). Userò anche con noncuranza alcune identità per l'operatore ∇; stanno su tutti i libri, ma è importante saperle dimostrare, perché è impossibile ricordarsele a memoria. Un vettore $\mathbf{v}$ ha componenti $(v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3) = \{v_i\}$, $i = 1, 2, 3$, e la convenzione ('di Einstein') è che un indice ripetuto si intende sommato, per es. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_i w_i$. Per i prodotti vettoriali si usa il tensore completamente antisimmetrico ϵ_{ijk}, $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{321} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321} = 1$, $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})_i = \epsilon_{ijk} v_j w_k$. L'identità fondamentale per i prodotti multipli è

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.6)$$

Così per es.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}))_i &= \epsilon_{ijk}u_j\epsilon_{klm}v_l w_m = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}u_j v_l w_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})u_j v_l w_m = \\
&= v_i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}) - w_i(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}). \\
(\nabla\wedge(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}))_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}u_l v_m) = \partial_j(u_i v_j) - \partial_j(u_j v_i) = \\
&= \big((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u})\big)_i
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Ci sono poi le due formule di Green, che useremo parecchio:

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) &= \phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi \\
\nabla\cdot(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) &= \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Aggiungo qualche esercizio, per fare pratica:

$$
\begin{gathered}
\nabla\wedge\nabla\phi = 0; \quad \nabla\cdot\nabla\wedge\mathbf{A} = 0; \quad (\nabla\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{B} == (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}\nabla\mathbf{B}^2; \\
\nabla\cdot(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\wedge\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\wedge\mathbf{B}; \quad \nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}. \\
\int_{\mathcal{V}} \nabla\psi\, d^3x = \int_{\partial\mathcal{V}} \psi\, d\mathbf{S}; \quad \int_{\mathcal{V}} \nabla\wedge\mathbf{A}\, d^3x = \int_{\partial\mathcal{V}} d\mathbf{S}\wedge\mathbf{A}
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

e uno più difficile (accenno i passaggi):
se $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, e $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv \int_0^1 t\,dt\,\mathbf{B}(t\mathbf{x})\wedge\mathbf{x}$, allora $\nabla\wedge\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})$.

$$
\begin{aligned}
(\nabla\wedge\mathbf{A})_i &= \int_0^1 t\,dt\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big(x_j B_i(t\mathbf{x}) - x_i B_j(t\mathbf{x})\big) = \\
&= \int_0^1 t\,dt\,\big(3B_i(t\mathbf{x}) + x_j t\frac{\partial B_i(t\mathbf{x})}{\partial t x_j} - \delta_{ij}B_j(t\mathbf{x})) - x_i t\frac{\partial B_j(t\mathbf{x})}{\partial t x_j}\big) = \\
&= \int_0^1 dt\,\frac{d}{dt}t^2 B_i(t\mathbf{x})
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

(questo generalizza la formula $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{B}\wedge\mathbf{x}$ che viene usata per il potenziale vettore di un campo magnetico uniforme).

Sull'uso della teoria delle distribuzioni. [6]

La teoria delle distribuzioni è una formalizzazione dell'uso della funzione δ di Dirac e simili, inventata da Schwarz, Gelfand e altri. Io semplifico drasticamente.

Si parte dal concetto di spazio delle 'funzioni di prova' $f(x)$: continue, infinitamente differenziabili, e tali che $\lim_{|x|\to\infty} |x|^N f(x) = 0$ per ogni $N \geq 0$, idem per tutte le sue derivate; il prototipo è una gaussiana.

Una 'famiglia regolare' è una sequenza $\{f_n(x)\}$ di funzioni tale che per qualunque funzione di prova $f(x)$ esiste il limite $\lim_{n\to\infty}\int dx f_n(x) f(x)$.

Due famiglie regolari $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ sono 'equivalenti' se per ogni funzione di prova $\lim_{n\to\infty} \int dx f_n(x) f(x) = \lim_{n\to\infty} \int dx g_n(x) f(x)$

Una 'distribuzione' è una classe di equivalenza di famiglie regolari.

Ci vuole un esempio, che naturalmente è la distribuzione $\delta(x)$. Una famiglia regolare nella classe di equivalenza della distribuzione $\delta(x)$ è $\{\sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}\}$; per verificarlo, data una funzione di prova $f(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} dx = f(0) + \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} (f(x) - f(0)) dx$$

$$|\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n^2x^2} (f(x) - f(0)) dx| \leq \text{Max}\,|f'(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} |x| dx = \frac{\text{Max}\,|f'(x)|}{\sqrt{n\pi}} \to 0$$

Nella parlanza comune, a una distribuzione $\Delta(x)$ 'si applica un cutoff Λ' o 'una regolarizzazione', passando da $\Delta(x)$ a una funzione $\Delta_\Lambda(x)$ continua etc., tale che $\lim_{\Lambda\to\infty} \Delta_\Lambda(x) = \Delta(x)$, ma facendo prima gli integrali e poi il limite, che è un modo casereccio di alludere alle definizioni di cui sopra.

Dai teoremi sull'integrale di Fourier possiamo dedurre che un'altra famiglia regolare nella classe di equivalenza della distribuzione $\delta(x)$ è

$$\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} e^{ikx} dk\} = \{\frac{\sin \Lambda x}{\pi x}\} \quad \to \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x)$$

E ancora: dal teorema di Cauchy sugli integrali di funzioni di variabile complessa:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} (\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon}) = \delta(x)$$

C'è un bel **teorema** (copiato da G.Marmo, A.Simoni et al., quant-ph/0505220) per verificare se una famiglia regolare sta nella classe di equivalenza della $\delta(x)$: sia f una funzione sommabile tale che $\int f(x) dx = 1$. Allora $\Lambda\, f(\Lambda(x - x')) \to \delta(x - x')$ quando $\Lambda \to \infty$. Infatti, se $\varphi(x)$ è una funzione di prova, per il teorema di Lebesgue:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \Lambda \int f(\Lambda(x - x')) \varphi(x) dx = \lim_{\Lambda\to\infty} \int f(s) \varphi(\frac{s}{\Lambda} + x') ds =$$
$$= \Lambda \int \lim_{\Lambda\to\infty} f(s) \varphi(\frac{s}{\Lambda} + x') ds = \varphi(x') \int f(s) ds = \varphi(x').$$

Un altro esempio di distribuzione, meno clamoroso ma importante per il seguito, è la 'funzione scalino' $\theta(x)$, che poniamo semplicemente come

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x') dx'$$

quindi $\theta(x) = 0$ per $x < 0$, $\theta(x) = 1$ per $x > 0$. Usando una qualunque famiglia regolare che definisca la $\delta(x)$ si vede che la discontinuità della $\theta(x)$ viene smussata; la funzione $\theta_\Lambda(x)$ cresce rapidamente da 0 a 1 in un intorno $\sim \frac{1}{\Lambda}$ di $x = 0$; per es. $\theta_\Lambda(x) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(\Lambda x))$. Siccome $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$, derivando questa espressione otteniamo $\delta_\Lambda(x) = \frac{\Lambda}{2\cosh^2(\Lambda x)}$ che è ancora un'altra famiglia regolare per la $\delta(x)$.

Per derivare le altre identità che ci serviranno, ricordando[1] che $\nabla \cdot \mathbf{x} = 3$, $\nabla|\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \hat{\mathbf{x}}$, si calcola pazientemente $\nabla\sqrt{r^2+a^2} = \frac{\mathbf{x}}{(r^2+a^2)^{1/2}}$, $\nabla\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} = \frac{-\mathbf{x}}{(r^2+a^2)^{3/2}}$, $\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} = \frac{-3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}}$. Adottando $1/a$ come cutoff, per ogni funzione di prova $f(\mathbf{x})$ posso definire $F(a) := \int f(\mathbf{x})\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}d^3x$, e calcolare l'integrale come la somma di un contributo $F(a)_i$ dall'interno di una sferetta di raggio $\delta > a$, e un contributo $F(a)_e$ dall'esterno.

$$|F(a)_e| = |\int_{r>\delta} f(\mathbf{x})\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}d^3r| \leq \frac{3a^2}{(\delta^2+a^2)^{5/2}}|\int_{r>\delta} f(\mathbf{x})d^3x|$$

E quindi $\lim_{a\to 0}|F(a)_e| = 0$. Per $F(a)_i$, ci sarà un $\widetilde{\mathbf{x}}$ interno alla sferetta tale che:

$$\begin{aligned} F(a)_i &= \int_{r<\delta} f(\mathbf{x})\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}d^3x = f(\widetilde{\mathbf{x}})\int_{r<\delta}\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}d^3x = \\ &= f(\widetilde{\mathbf{x}})\int_{r=\delta}\nabla\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\hat{\mathbf{x}}\,r^2d\Omega = f(\widetilde{\mathbf{x}})\int_{r=\delta}\frac{-\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{x}}\,r^2d\Omega}{(r^2+a^2)^{3/2}} = -f(\widetilde{\mathbf{x}})\frac{4\pi\delta^3}{(\delta^2+a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

e quindi $\lim_{\delta\to 0}\lim_{a\to 0}F(a) = -4\pi f(0)$; ma notare quanto è importante qui prendere i limiti nell'ordine giusto. Ci si convince così che:

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z)\ . \tag{1.11}$$

[un ragionamento molto più rapido userebbe il teorema, e

$$\int d^3x\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} = \int d^3x\frac{-3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} = \int_0^\infty\frac{4\pi r^2(-3a^2)dr}{(r^2+a^2)^{5/2}} = -4\pi$$

se uno è rapido a trovare l'integrale fatto su Gradshteyn Ryzhik]. Fisicamente è ovvio: stiamo dicendo che $\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ è la densità di carica di una carica puntiforme, e che il suo potenziale è quello di Coulomb.

Nello studio delle onde ci servirà poi sapere che per $r \neq 0$

$$\nabla\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} = \frac{\mathbf{x}}{r}\,\frac{\pm ik|\mathbf{x}|-1}{r}\,\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\quad;\quad\nabla^2\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} = -k^2\,\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} \tag{1.12}$$

Con un ragionamento analogo al precedente possiamo verificare che

$$(\nabla^2+k^2)\frac{e^{\pm ikr}}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \tag{1.13}$$

[1] per risparmiare fatica e spazio, pongo (quasi sempre) $r = |\mathbf{x}|$

che sarà usata qui, e poi, per es. nella teoria dello scattering da potenziale in meccanica quantistica; in quel contesto è importante la relazione (esercizio ?):

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r} = \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}}{k^2 - k'^2 + i\epsilon}$$

Il concetto di 'spettro di potenza'.

[questo concetto è in condominio fisici/ingegneri elettronici/matematici; ci sono inevitabilmente pasticci di notazione etc.]

L'integrale di Fourier permette di rappresentare un impulso come la sovrapposizione di un continuo di frequenze: una funzione $x(t)$ che rappresenta un 'impulso' sarà a quadrato sommabile (tale che $\int_{-\infty}^{\infty} dt|x(t)|^2 < \infty$) e può essere espressa come integrale di Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\widetilde{a}(\omega)e^{i\omega t} \quad \leftrightarrow \quad \widetilde{a}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.14}$$

$\widetilde{a}(\omega)$ è la trasformata di Fourier di della funzione reale $x(t)$, quindi $\widetilde{a}(\omega) = \widetilde{a}(-\omega)^*$. Il teorema di Parseval dà

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt|x(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}|\widetilde{a}(\omega)|^2 \ . \tag{1.15}$$

Ma anche la luce di una lampadina o di una stella, o il rumore del traffico contengono un continuo di frequenze, senza essere in nessun senso 'impulsi'. Sia nell'analisi sperimentale che nella trattazione matematica di questi segnali 'perenni' si deve tenere conto del loro aspetto di fenomeni statistici. La chiave è il concetto di 'spettro di potenza' (o 'densità spettrale di potenza') di un segnale $x(t)$, che è definito da:

$$S(\nu) = \lim_{T\to\infty} < \frac{1}{2T}\Big|\int_{-T}^{T} x(t)e^{-i2\pi\nu t}dt\Big|^2 > \tag{1.16}$$

che è la grandezza che misura uno spettrometro. Dietro questa definizione c'è l'idea che $x(t)$ rappresenta un 'processo stocastico', su cui i simboli $< . >$ mi indicano di fare la media. Notare subito che $S(\nu) \geq 0$, e che in generale il limite $T \to \infty$ dell'integrale diverge come T per qualunque ν, e quindi l'ordinario integrale di Fourier è fuori gioco da subito, sia detto per evitare confusione. Per esempio, se $x(t)$ è una corrente in una resistenza R, la potenza dissipata dalle sue componenti tra ν e $\nu + d\nu$ sarà $R^2 S(\nu)d\nu$. La 'potenza' totale del segnale sarà l'integrale di $S(\nu)$; per es., integrando lo spettro di potenza del corpo nero trovo la legge di Stefan $P_{tot} = \sigma T^4$.

Sviluppando la (1.16), trovo:

$$S(\nu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} dt\,dt' < x(t)x(t') > e^{-i2\pi\nu(t-t')} \tag{1.17}$$

$< x(t)x(t') >$ è la 'funzione di correlazione' temporale del segnale, che dà una misura della memoria della sua sorgente. Se il processo che lo genera è stazionario (e qui lo suppongo), la funzione di correlazione dipende solo dal modulo della differenza $|t - t'|$ e pongo

$$< x(t)x(t') >:= R(t - t') \tag{1.18}$$

Con un cambiamento di variabili equalche passaggio (non completamente banale) dalla (1.17) ottengo il teorema di Wiener-Khinchine:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos(2\pi\nu\tau)d\tau \tag{1.19}$$

(ho supposto $R(\tau) = R(-\tau)$). Con la (1.14) possiamo invertire questa relazione, e ottenere:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu S(\nu)e^{i2\pi\nu\tau} \tag{1.20}$$

Queste relazioni generali tra funzione di correlazione e spettro di potenza hanno anche una grande importanza pratica: esiste infatti un algoritmo molto intelligente ('fast Fourier transform', FFT, [7]) per realizzarle numericamente su insiemi di dati.

Facciamo un esempio/verifica, in due tappe. Se il segnale è deterministico, per es. $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, facendo il calcolo, trovo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2TA^2}\Big|\int_{-T}^{T} x(t)e^{-i\omega t}dt\Big|^2 = \\ &\quad = \frac{T}{2}\frac{\sin^2(\omega_0-\omega)T}{T^2(\omega_0-\omega)^2} + \frac{T}{2}\frac{\sin^2(\omega_0+\omega)T}{T^2(\omega_0+\omega)^2} + \frac{\cos 2\phi}{T}\frac{\sin(\omega_0-\omega)T}{(\omega_0-\omega)}\frac{\sin(\omega_0+\omega)T}{(\omega_0+\omega)} \end{aligned}$$

Adesso torna utile il teorema dato alla fine della sezione precedemte; perché $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin^2x}{x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x}dx = \pi$ (cfr. Abramovicz); al limite per $T \to \infty$ il terzo termine va a zero, nei primi due ho una funzione δ, e quindi

$$S(\nu) = \frac{\pi}{2}A^2(\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega)) = \tfrac{1}{4}A^2\big(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)\big)$$

Consideriamo invece un segnale sempre della forma $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, ma adesso con A random con $< A^2 >= \overline{A}^2$, fase φ random, uniformemente distribuita in $(0, 2\pi)$, e frequenza random, non correlata con φ e A, con densità di probabilità $p(\nu_0)$; per esempio una gaussiana intorno a un $\overline{\nu}_0$, che dà un modello ragionevole per una sorgente non proprio monocromatica. Siccome la fase φ è uniformemente distribuita, posso calcolare facilmente:

$$\begin{aligned} < x(t) > &= 0 \\ < x(t)x(t') > &= \overline{A}^2 < \cos(\omega_0 t + \varphi)\cos(\omega_0 t' + \varphi) >= \\ &= \tfrac{1}{2}\overline{A}^2 < \cos(\omega_0(t + t') + 2\varphi) + \cos\omega_0(t - t') >= \\ &= \tfrac{1}{2}\overline{A}^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(\nu_0)\cos(2\pi\nu_0(t - t'))d\nu_0 \;:= R(t - t') \end{aligned} \tag{1.21}$$

Lo spettro di potenza è dato da

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \tfrac{1}{4}\overline{A}^2 \big(p(\nu) + p(-\nu)\big) \tag{1.22}$$

Se $p(\nu)$ ha un gran picco intorno a $\nu = \pm\overline{\nu}_0$, questo somiglia molto al caso 'puro' che abbiamo visto più sopra, e nel limite di larghezza zero lo riproduce.

Coordinate curvilinee ortogonali. L'esercizio tipico è il calcolo del Laplaciano ∇^2 in coordinate polari, che affrontato direttamente è penoso. La strategia generale si impara in geometria differenziale; è però (forse) sufficiente quanto segue se ci limitiamo alle coordinate curvilinee ortogonali, che sono quelle per cui gli spostamenti infinitesimi quando le vario una alla volta sono perpendicolari fra di loro. Chiamo le coordinate $q_i = q_i(x, y, z)$, per es. (r, θ, φ), e,

$$ds_i = H_i dq_i \qquad \text{per es.:} \quad H_1 = 1,\ H_2 = r,\ H_3 = r\sin\theta \tag{1.23}$$

Ne segue $dV = dxdydz = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$; per il gradiente, $(\nabla\phi)_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}$, se si vuole che $\int_A^B d\mathbf{s}\cdot\nabla f = f(B) - f(A)$. Riderivando il teorema della divergenza (cioè, insistendo che il flusso di $\mathbf{A}$ uscente da un parallelepipedo (ds_1, ds_2, ds_3) sia uguale a $\nabla\cdot\mathbf{A}$ per il volume), si ricava:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\Big(\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1A_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\Big) \tag{1.24}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\Big(\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3})\Big) \tag{1.25}$$

per es., in coordinate polari:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}) \tag{1.26}$$

2. Elettrostatica.

Condizioni al contorno di Dirichlet e di Neumann, funzioni armoniche.

In 'condizioni stazionarie' (che non significa che non succede nulla, ma che succede sempre la stessa cosa), $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla\wedge\mathbf{E} = 0$; dal lemma di Poincaré segue allora che in un dominio semplicemente connesso esiste $V:\ \mathbf{E} = -\nabla V$. Dalla legge di Gauss (prima eq. di Maxwell) otteniamo l'equazione di Poisson per il potenziale elettrico

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0 \tag{2.1}$$

che se $\rho = 0$ si riduce all'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$. Naturalmente queste equazioni devono essere complementate con condizioni al contorno. E' importante ricordare che tutti sappiamo (ma magari non sappiamo di sapere) la soluzione per il potenziale generato da una distribuzione di cariche ρ sole nell'universo, con $V(\infty) = 0$: è la generalizzazione del potenziale di Coulomb

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$

Se supponiamo invece che le cariche siano all'interno di un volume $\mathcal{V}$ delimitato dal bordo $S = \partial\mathcal{V}$ (magari formato da superfici metalliche), allora integrando su $\mathcal{V}$ la seconda formula di Green con $\phi(\mathbf{x}') = V(\mathbf{x}')$, $\psi(\mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$, usando il teorema della divergenza, la (1.11) e la (2.1), otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x}' \, \nabla' \big(V(\mathbf{x}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' V(\mathbf{x}') \big) = \\
&\quad = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x}' \big(-4\pi V(\mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\epsilon_0} \big) = -4\pi V(\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{\epsilon_0 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \\
&\quad = \int_{\partial\mathcal{V}} \big(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' V(\mathbf{x}') - V(\mathbf{x}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \big) \cdot d\mathbf{S}'
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} \big(V(\mathbf{x}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \nabla' V(\mathbf{x}') \big) \cdot d\mathbf{S}' \tag{2.3}$$

[Avrei dovuto regolarizzare, e mandare il cutoff a ∞ alla fine del ragionamento; la teoria delle distribuzioni permette di farlo una sola volta]. Questa bella equazione dà l'illusione di una soluzione finale per l'elettrostatica, ma è chiaro fisicamente che non possiamo assegnare liberamente i valori di V e di $\hat{n} \cdot \nabla V = -E_\perp$ su $\partial\mathcal{V}$: sulle superfici metalliche possiamo assegnare V, e chiederci quale sarà V nel volume e la densità di carica σ sulle superfici (per il teorema di Coulomb, $\sigma = \epsilon_0 E_\perp$) ('problema di Dirichlet'); oppure supporre di conoscere le densità di carica superficiale punto per punto su $\partial\mathcal{V}$, quindi $\hat{n} \cdot \nabla V|_{\partial\mathcal{V}}$, e chiederci quale sarà V in generale e su $\partial\mathcal{V}$ ('problema di Neumann').

Per entrambe queste impostazioni ci sono teoremi di esistenza della soluzione (immagino di Cauchy) che sono difficili, mentre è facile dimostrarne l'unicità, come segue:

siano V, V' due soluzioni dell'equazione di Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ in $\mathcal{V}$. Se $\Phi = V - V'$, allora $\nabla^2 \Phi = 0$ in $\mathcal{V}$, e quindi

$$\int_S \Phi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla(\Phi \nabla \Phi) d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}} (\Phi \nabla^2 \Phi + \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) d^3\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla\Phi)^2 d^3\mathbf{x} \tag{2.4}$$

che è ≥ 0 a meno che non sia $\nabla\Phi = 0$ in tutto $\mathcal{V}$. Ne segue che se V e V' soddisfano alle stesse condizioni al contorno di Dirichlet, $V|_S = V'|_S \to \Phi|_S = 0 \to \nabla\Phi = 0$ in $\mathcal{V}$, quindi $V = V'$ in $\mathcal{V}$. Se invece V e V' soddisfano alle stesse condizioni al contorno di Neumann, $\hat{n} \cdot \nabla\Phi|_S = 0 \to \nabla V = \nabla V'$ in $\mathcal{V}$, che implica $V = V' + cost.$.

Con la legge di Gauss $\int_S \nabla V \cdot d\mathbf{S} = -\frac{Q}{\epsilon_0}$ si ricavano due utili proprietà della funzioni armoniche, quelle per cui, in un qualche dominio $\mathcal{V}$, $\nabla^2 V = 0$:

Se $V = V_0$ sul bordo (lo *stesso* $V_0 = cost.$ su tutto $\partial\mathcal{V}$), $V = V_0$ in $\mathcal{V}$ [nella (2.4) con $\Phi = V$, il membro a sinistra dà $V_0 \int_S \nabla V \cdot d\mathbf{S} = -V_0 Q/\epsilon_0$, ma per ipotesi non c'è carica in $\mathcal{V}$].

V non ha massimi o minimi all'interno di $\mathcal{V}$ (e quindi non ci può essere equilibrio stabile in elettrostatica) [un minimo o un massimo sarebbe circondato da una superficie equipotenziale S, con $\int_S \nabla V \cdot d\mathbf{S} \neq 0$, e non c'è carica in $\mathcal{V}$].

Metodo delle immagini.

I teoremi di unicità hanno la piacevole conseguenza che se io trovo una soluzione a un problema di elettrostatica (ben posto), quella è <u>la</u> soluzione, comunque io l'abbia ricavata. Un esempio è offerto dal 'metodo delle immagini', il primo che incontriamo, e che probabilmente vi è noto.

Per cominciare, supponiamo di avere un piano metallico $z = 0$ mantenuto a $V = 0$. Il potenziale generato in $\mathbf{x} = (x, y, z)$, nel semispazio $z \geq 0$, da una carica puntiforme q posta in $\mathbf{x}' = (x', y', z')$, $z' > 0$, sarà la somma di quello generato da q e di quello di una 'carica immagine' $\overline{q} = -q$ posta in $\overline{\mathbf{x}}' = (x', y'. -z')$,

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}'|})$$

Si vede che per $z > 0$ questa V soddisfa $\nabla^2 V = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\epsilon_0$, e che per $z = 0$, $V = 0$; e quindi è <u>la</u> soluzione; naturalmente non è valida per $z < 0$, ma quello non ci è stato chiesto. Per di più, è una 'funzione di Green' per il problema di Dirichlet associato al piano, perché se invece di una carica puntiforme avessi una distribuzione di carica $\rho(\mathbf{x}')$ nel semispazio superiore, il potenziale sarebbe $V(\mathbf{x}) = \int_{z'>0} \rho(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 r'$.

Posso estendere il ragionamento a geometrie diverse, per es. al caso di una carica puntiforme posta all'esterno di una sfera di metallo di raggio a, con il centro nell'origine. Se la sfera sta a $V = 0$, la carica q sta in $\mathbf{x}'$, piazzo la carica immagine $\overline{q}$ in $\overline{\mathbf{x}}'$ con $|\overline{\mathbf{x}}'| < a$, $\frac{\overline{\mathbf{x}}'}{|\overline{\mathbf{x}}'|} = \hat{\mathbf{x}}' \equiv \hat{\mathbf{n}}'$; il potenziale in $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{n}}$ avrà la forma:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\overline{q}}{q}\frac{1}{|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}'|}\right)$$

Perché V sia zero per $|\mathbf{x}| = a$, deve essere, per ogni $\hat{\mathbf{n}}$:

$$0 = \frac{1}{|a\hat{\mathbf{n}} - r'\hat{\mathbf{n}}'|} + \frac{\overline{q}}{q}\frac{1}{|a\hat{\mathbf{n}} - \overline{r}'\hat{\mathbf{n}}'|} = \frac{1}{a|\hat{\mathbf{n}} - \frac{r'}{a}\hat{\mathbf{n}}'|} + \frac{\overline{q}}{\overline{r}'q}\frac{1}{|\frac{a}{\overline{r}'}\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{n}}'|}$$

che sarà se $\frac{1}{a} = -\frac{\overline{q}}{\overline{r}'q}$, $\frac{r'}{a} = \frac{a}{\overline{r}'}$, quindi $\overline{r}' = \frac{a^2}{r'}$, $\frac{q'}{q} = -\frac{a}{r'}$, e

$$V(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{r'}\frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{x}'|})$$

(c'è qualcosa di miracoloso in questa soluzione). La carica superficiale indotta sarà:

$$\sigma = -\epsilon_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla V\big|_{|\mathbf{x}|=a} = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi} \frac{r'^2 - a^2}{a(a^2 + r'^2 - 2ar'\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}')^{3/2}}$$

Integrando sulla superficie, trovo (esercizio) che la carica totale distribuita sulla sfera è proprio $q' = -\frac{qa}{r'}$. La forza sulla carica sarà q volte il campo in $\mathbf{x}'$, depurato del pezzo (divergente) prodotto dalla carica q stessa, quindi:

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \nabla(-\frac{a}{r'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{x}'|})\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r'} \frac{\hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{x}' - \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{x}'|^2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r'^3} \frac{\hat{\mathbf{n}}'}{(1 - \frac{a^2}{r'^2})^2}$$

che è sempre attrattiva, e va come r'^{-3} per $r' >> a$, ma diverge come $(r' - a)^{-2}$ quando la carica si avvicina alla superficie della sfera.

Se isolo la sfera e le aggiungo la carica $Q - q'$, otterrò

$$V(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a}{r'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{x}'|}) + \frac{Q + \frac{qa}{r'}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

per il potenziale di sfera conduttrice isolata con carica Q in presenza di una carica puntiforme q in $\mathbf{x}'$. In questo caso la forza sulla carica sarà (se Q e q hanno lo stesso segno) repulsiva a grande distanza, ma attrattiva vicino alla sfera.

Se invece mantengo la sfera a V_0 invece che a $V = 0$ ho:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \frac{V_0 a}{r}$$

* sfera conduttrice in campo esterno costante, cfr.[1], es.4.23, [2].

Separazione delle variabili.

Questa è una tecnica di soluzione molto generale, già incontrata in meccanica quantistica, applicabile tutte le volte che è possibile adattare le coordinate alle condizioni al contorno. Mi limito a dare degli esempi svolti, copiati dai testi.

Es.1: filo carico tra due piani conduttori a V=0, parallelo ai piani, cfr.per es.[5], pg.53.

Supponiamo che i due piani siano $z = 0,\ z = a$, e il filo carico con densità di carica λ stia sulla retta $y = 0,\ z = b,\ b < a$.

Escludendo il piano $y = 0$, per $0 < z < a$ e $y > 0$ (destra) oppure $y < 0$ (sinistra), ho potenziali $V_d,\ V_s$ che soddisfano l'equazione di Laplace, non dipendono da x (e quindi abbiamo a che fare con un problema bidimensionale), vanno a zero per $|y| \to \infty$, e sono zero per $z = 0,\ a$. L'ansatz $V_d = Y_d(y)Z_d(z)$ dà $Y_d''Z_d + Y_dZ_d'' = 0$, quindi $\frac{Z_d''}{Z_d} = -\frac{Y_d''}{Y_d} = -k^2$. Ho scelto il segno della 'costante di separazione' k^2 in modo da poter avere $Y_d(\infty) = 0$.

Dalle condizioni al contorno per Z_d deduco che deve essere $k = \pi n/a$, e $Z_d = c\sin(\pi n\frac{z}{a})$, quindi $Y_d = c'\exp(-\pi n\frac{y}{a})$. Ripeto il ragionamento per V_s, e ottengo, in prima battuta

$$V_d = \sum_{n=1}^{\infty} c_{dn} \sin \pi n \frac{z}{a}\; e^{-\pi n \frac{y}{a}} \quad , \quad V_s = \sum_{n=1}^{\infty} c_{sn} \sin \pi n \frac{z}{a}\; e^{\pi n \frac{y}{a}}$$

Per ogni $z \neq b$ a $y = 0$ il potenziale è continuo, e quindi per ogni n, $c_{dn} = c_{sn} \equiv c_n$; ma devo imporre che nel piano $y = 0$ ci sia il filo carico, che significa una densità di carica superficiale $\sigma(x, z) = \lambda\delta(z - b)$. A $y = 0$ ho

$$E_{dy} - E_{sy} = -\partial_y V_d\big|_{y=0} + \partial_y V_s\big|_{y=0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{2\pi n}{a} \sin \pi n \frac{z}{a} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma(x, z)$$

Per calcolare i coefficienti c_n uso l'ortogonalità delle funzioni $\sin \pi n\frac{z}{a}$ sull'intervallo $(0, a)$:

$$\int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{2\pi n}{a} \sin \pi n \frac{z}{a}\; \sin \pi m \frac{z}{a}\, dz = c_m \frac{2\pi m}{a}\frac{a}{2} = \int_0^a \frac{\lambda}{\epsilon_0}\delta(z - b) \sin \pi m \frac{z}{a}\, dz = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \sin \pi m \frac{b}{a}$$

Quindi $c_m = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 m} \sin \pi m \frac{b}{a}$, e

$$V(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\epsilon_0} \sin \pi m \frac{b}{a}\; \sin \pi m \frac{z}{a}\; e^{-\pi m \frac{|y|}{a}}$$

Soluzione completa, anche se non particolarmente illuminante. In alternativa avremmo potuto dividere la regione tra i piani in 'su' e'giù'. Questa volta trovo che devo prendere la costante di separazione con il segno opposto, quindi $\frac{Z_g''}{Z_g} = -\frac{Y_g''}{Y_g} = k^2$ (idem per le funzioni 'giù'). Con le stesse idee di prima e qualche tentativo trovo:

$$V_s = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, c(k)\, e^{iky}\, \frac{\sinh k(z - a)}{\sinh k(b - a)} \quad , \quad V_g = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, c(k)\, e^{iky}\, \frac{\sinh kz}{\sinh kb}$$

Il filo adesso è una densità di carica $\sigma(x, y) = \lambda\delta(y)$ nel piano $z = b$, quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\epsilon_0}\delta(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} e^{iky} = \\
&= E_{sz}\big|_{z=b} - E_{gz}\big|_{z=b} = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, c(k)\, e^{iky} k \left(\frac{\cosh kb}{\sinh kb} - \frac{\cosh k(b - a)}{\sinh k(b - a)} \right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, c(k)\, e^{iky} \frac{k \sinh ka}{\sinh k(a - b) \sinh kb}
\end{aligned}$$

posso calcolare $c(k)$ uguagliando quello che moltiplica e^{iky}, e alla fine ho:

$$V_s = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{iky}\, \sinh kb}{k\, \sinh ka} \sinh k(a - z)\ ,\ V_g = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \frac{e^{iky}\, \sinh k(a - b)}{k\, \sinh ka} \sinh kz$$

Dimostrare che questa e la precedente sono la stessa funzione sviluppata in modo diverso non è facile, ma è possibile. Ancora un'altra rappresentazione dello stesso potenziale potrebbe essere ottenuta con il metodo delle immagini, sommando le infinite immagini multiple del filo.

* **Coordinate sferiche**.

Abbiamo visto la forma dell'equazione di Laplace in coordinate polari (r, θ, φ), (1.26), come esempio della regola generale (1.25). La separazione delle variabili $V \sim R(r)Y(\theta, \varphi)$ dà, come è noto dal corso di meccanica quantistice:

$$\frac{d}{dr}(r^2 \frac{dR}{dr}) - l(l+1)R = 0 \quad \rightarrow \quad R = Ar^l + Br^{-l-1} \tag{2.5}$$

e l'equazione delle 'armoniche sferiche' per la Y, le cui soluzioni regolari sono le funzioni $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Ne elenco alcune, e qualche loro proprietà:

$$Y^*_{lm} = (-)^m Y_{l\,-m}; \qquad \int Y^*_{lm} Y_{l'm'} \sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'};$$

$$\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta'\varphi')Y_{lm}(\theta\varphi) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}')$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x+iy}{|\mathbf{x}|}; \quad Y_{11} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{|\mathbf{x}|}$$

$$Y_{22} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\varphi}; \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{i\varphi}; \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \tfrac{1}{2}) \tag{2.6}$$

Le funzioni P_l sono i polinomi di Legendre. Delle loro innumerevoli proprietà ci basta ricordare $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ P_l(1) = 1,$

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,m} \quad , \quad \sum_0^\infty \rho^l P_l(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2 - 2\rho x}} \ , \ |\rho| \leq 1 \tag{2.7}$$

Dalla serie (che dà la 'funzione generatrice' dei polinomi di Legendre), se $r' < r$ e $z = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}'$:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'z}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{r'}{r})^2 - 2\frac{r'}{r}z}} = \frac{1}{r}\sum_0^\infty (\frac{r'}{r})^l P_l(z) \tag{2.8}$$

Un esempio è il potenziale all'esterno di una sfera di raggio a in cui è concentrata tutta la carica, con una distribuzione $\rho(\mathbf{x})$ (per es., un nucleo). Per $r > a$ si trova lo sviluppo in multipoli del potenziale; usando le proprietà sopra elencate:

$$4\pi\epsilon_0 V(\mathbf{x}) = \int_{r'<a} \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' = \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{r^{l+1}} \int \rho(\mathbf{x}') r'^l P_l(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}') d^3\mathbf{x}' =$$

$$= \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{r^{l+1}} \Big(\frac{4\pi}{2l+1} \int \rho(\mathbf{x}') r'^l Y^*_{lm}(\theta'\varphi') d^3r' \Big) Y_{lm}(\theta\varphi) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{l} Q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \tag{2.9}$$

con i momenti di multipolo Q_{lm}. Per i primi ordini però la forma cartesiana è più semplice. Sviluppando nelle componenti di $\mathbf{x}'$ intorno all'origine, troviamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} &= \frac{1}{r} + x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}|_{\mathbf{x}'=0} + \tfrac{1}{2} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}|_{\mathbf{x}'=0} + ... = \\
&= \frac{1}{r} + \mathbf{x}' \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \tfrac{1}{2} x'_i x'_j \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} + ... = \frac{1}{r} + \mathbf{x}' \cdot \frac{\mathbf{x}}{r^3} + \tfrac{1}{2}(3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \frac{x_i x_j}{r^5} + ... \\
4\pi\epsilon_0 V(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^3} + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + ... \\
Q &= \int_{r<a} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad p_i = \int_{r<a} x_i \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad Q_{ij} = \int_{r<a} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

dove ho indicato l'espressione della carica totale, e del momento di dipolo e di quadrupolo della distribuzione di carica nella forma cartesiane. Notare che il momento di quadrupolo Q_{ij} è un tensore simmetrico a traccia nulla, 5 parametri; lo stesso numero di $Q_{2m}, m = -2, .., 2$ (ricordando che $Q^*_{lm} = Q_{l\,-m}$).

Un semplice giochino. A seconda che sia $r' < r$ o $r' > r$, possiamo scrivere

$$
\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{r'}{r})^l P_l(\cos\theta) = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{r}{r'})^l P_l(\cos\theta) \quad , \quad \cos\theta = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}'}
$$

Le stessa serie ci permettono di calcolare il potenziale di un anello di raggio a con carica q uniformemente distribuita, parallelo al piano $x - y$ e con il centro in $(0, 0, b)$. Un punto dell'anello dista dall'origine $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, e ha coordinate polari (c, θ_0, φ), $\cos\theta_0 = \frac{b}{c}$; il potenziale generato in un punto sull'asse dell'anello, di coordinate polari $(r, 0, 0)$, è [1] $(q/4\pi\epsilon_0)$ diviso la distanza tra il punto e un punto dell'anello, quindi

$$
4\pi\epsilon_0 V(r, 0) = \frac{q}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos\theta_0}} = \frac{q}{c} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{r}{c})^l P_l(\cos\theta_0) = \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{c}{r})^l P_l(\cos\theta_0)
$$

che convergono rispettivamente per $r < c$ e $r > c$. Siccome $P_l(1) = 1$, queste espressioni ci dicono che forma hanno le funzioni $R_l(r)$, del tipo (2.5), nello sviluppo di V in un punto qualsiasi dello spazio, e avremo:

$$
4\pi\epsilon_0 V(r, \cos\theta) = \frac{q}{c} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{r}{c})^l P_l(\cos\theta_0) P_l(\cos\theta) = \frac{q}{r} \sum_{l=0}^{\infty} (\frac{c}{r})^l P_l(\cos\theta_0) P_l(\cos\theta)
$$

Elegante.

Ancora un esercizio, cfr.[1], es.5.5: una sfera di dielettrico di raggio a, costante dielettrica ϵ_r, in un campo elettrico uniforme asintoticamente $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} E_0$. Il potenziale asintoticamente sarà $V = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$. E quindi dalla (2.5) capiamo che dentro e fuori della sfera il potenziale avrà la forma:

$$V_d = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \ , \ r < a \quad ; \quad V_f = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) - E_0 r P_1(\cos\theta) \ , \ r > a$$

La continuità del potenziale e di $\mathbf{D}_\perp$ per $r = a$ implica che $V_d|_a = V_f|_a$ e $\epsilon_r \frac{\partial V_d}{\partial r}|_a = \frac{\partial V_f}{\partial r}|_a$, per ogni θ, e quindi per ogni l. Con un po' di pazienza se ne deduce che:

$$A_0 = B_0 = 0 \ , \quad A_1 = -\frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 \ , \quad B_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3 \ , \quad A_l = B_l = 0 \ , \ l > 1$$

$$V_d = -\frac{3E_0 r \cos\theta}{\epsilon_r + 2} \quad , \quad V_f = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{E_0 a^3 \cos\theta}{r^2} - E_0 r \cos\theta$$

All'interno del dielettrico il campo è uniforme; all'esterno, quello che si vede è il campo uniforme più il campo di un dipolo $p = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3$.

Coordinate cilindriche

Per certi versi le coordinate cilindriche danno più complicazioni di quelle sferiche, perché portano invariabilmente alle funzioni di Bessel. Il Laplaciano ha la forma

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \ .$$

Per l'equazione di Laplace, separando le variabili $V \sim R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, si trova:

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0 \ \rightarrow \ \Phi = e^{\pm i n \varphi} \quad ; \quad Z'' - k^2 Z = 0 \ \rightarrow \ Z = e^{\pm kz}$$

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + (k^2 - \frac{n^2}{\rho^2}) R = 0 \ \rightarrow \quad R(\rho) = A_n J_n(k\rho) + B_n N_n(k\rho) \ , \ k \neq 0$$

$$R(\rho) = A\rho^n + B\rho^{-n} \quad , \quad k = 0$$

Perché la Φ sia univocamente determinata n deve essere intero, ed è zero se c'è simmetria cilindrica (questo argomento non si applica al potenziale in uno spigolo tra due piani). Le funzioni J_n, N_n sono appunto le funzioni di Bessel: oscillano, poi vanno a zero per $k\rho \rightarrow \infty$; quella regolare nell'origine è la J_n. Ho $J_{-n}(x) = (-)^n J_n(x)$; $J_n(x) \simeq \frac{1}{n!}(\frac{x}{2})^n$ per $x << 1$, $J_n(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi)$ per $x >> 1$.

L'argomento è vasto, e mi limito a un esempio: il potenziale di una carica puntiforme q posta nell'origine, in un tubo infinito conduttore di raggio a posto a potenziale 0. Come nel caso della carica posta tra due piani conduttori, divido lo spazio in su e giù. I valori di k possibili sono quelli tali che $J_0(ka) = 0$, e questi formano un insieme discreto, determinato dagli zeri di $J_0(x)$ (che sono tabulati, e chiamo x_l, $l = 1, 2, ..$). Avrò:

$$V_s(\rho, z) = \sum_{1}^{\infty} C_{sl} e^{-x_l z/a} J_0(x_l \rho/a) \quad ; \quad V_g(\rho, z) = \sum_{1}^{\infty} C_{gl} e^{x_l z/a} J_0(x_l \rho/a)$$

(barando un poco) dico che siccome a $z = 0$ il potenziale è (quasi dappertutto) continuo, deve essere $C_{sl} = C_{gl} = C_l$, coefficienti che determino imponendo che a $z = 0$ ci sia una densità di carica $\sigma = q\delta(x)\delta(y)$[2] e quindi

$$\frac{q}{\epsilon_0}\delta(x)\delta(y) = E_{sz}|_{z=0} - E_{gz}|_{z=0} = -\frac{\partial V_s}{\partial z}|_{z=0} + \frac{\partial V_g}{\partial z}|_{z=0} = 2\sum_1^\infty \frac{x_l}{a} C_l J_0(x_l\rho/a) \quad (2.11)$$

E' chiaro che mi serve una qualche ortonormalità per calcolare le C_l; c'è, e in questo caso particolare è data dalla formula:

$$\int_0^a J_0(x_l\frac{\rho}{a})J_0(x_{l'}\frac{\rho}{a})\rho d\rho = \tfrac{1}{2}a^2 J_1^2(x_l)\delta_{l\,l'}$$

Quindi, se moltiplico la (2.11) per $J_0(k_{l'}\rho/a)$ destra e sinistra, e integro in $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$ ottengo

$$V(\rho, z) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}\sum_1^\infty e^{-x_l|z|/a}\frac{J_0(x_l\rho/a)}{x_l J_1^2(x_l)}$$

Espressione a dir poco opaca. Intorno a $\rho = z = 0$ dovrebbe dare il potenziale di Coulomb, e non si vede affatto. Come per le altre soluzioni ottenute in forma di serie, mi piacerebbe avere un grafico delle curve di livello di V, ma non l'ho mai visto.

Chi non ne avesse abbastanza può applicarsi al prob. 3.21 di [2], in cui la carica è posta in un punto qualsiasi di una scatola cilindrica finita; le formule sono atroci, ma la procedura per ottenerle è la stessa che abbiamo seguito.

Esercizio finale: la carica spaziale nei diodi a vuoto.

In un diodo a vuoto (e numerosi dispositiv affini) un catodo 'caldo' emette n elettroni/s, con velocità $\simeq 0$, che vengono attratti da un anodo a potenziale $V_0 > 0$, dando luogo a una corrente $I = -ne$. Tra catodo e anodo (qui schematizzati come le armature di un condensatore a facce parallele di area S, distanti d) si forma una 'carica spaziale' con densità $\rho(x)$. Dalla legge di Gauss $\frac{d^2V}{d^2x} = -\rho/\epsilon_0$, dalla conservazione dell'energia $\frac{1}{2}mv^2 - eV = 0$, dalla conservazione della carica $\rho\, v = J = -\frac{ne}{S}$ =cost. Otteniamo l'equazione differenziale

$$\frac{d^2V}{d^2x} + \frac{I}{\epsilon_0 S}\sqrt{\frac{m}{2eV}} = 0$$

si vede che una soluzione $V = V_0(\frac{x}{d})^\alpha$ va bene se $\alpha = 4/3$, e $I = kV_0^{3/2}$ (legge di Child-Langmuir).

3.0 Campi magnetici, campi elettrici e magnetici nella materia.

[2] notare che mi guardo bene dallo scrivere $\delta(\rho)$; le coordinate polari sono infide a $\rho = 0$.

L'esposizione della teoria del magnetismo che viene data nei libri di fisica generale mi è sempre sembrata concettualmente povera, e non ha neanche l'attenuante di seguire il percorso storico: si parte dalla forza di Lorentz, poi si dà la legge di Biot-Savart, il tutto viene generalizzata a occhio nelle 'formule di Laplace', infine spunta la legge di Ampère. Si può fare di meglio? Probabilmente no, ma in seconda battuta si potrebbe ricostruire un percorso concettuale come segue.

Prendiamo come fatti primari che ci sono i dipoli (i magneti che venivano da Magnesia) e che non ci sono poli magnetici (spezzi un dipolo e ne hai due), che c'è il campo magnetico terrestre (Flavio Gioia), che il campo magnetico agisce sulle cariche in movimento. Quindi come leggi primarie prendiamo la solenoidalitá del campo, l'effetto del campo sui dipoli, e l'espressione della forza di Lorentz su una carica in movimento:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \mathbf{M} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}; \quad U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}; \quad \mathbf{F} = q\, \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{3.1}$$

($\mathbf{M}$ è il momento della forza, in $N\,m$). Dall'espressione della forza di Lorentz si ottiene quella della forza su fili percorsi da corrente, e le dimensioni di $\mathbf{B}$, e quindi di $\mathbf{m}$:

$$[B] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C\,m\,s^{-1}}} = \frac{Kg\,m\,s^{-2}}{C\,m\,s^{-1}} = \frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{C\,s}} := \mathrm{Tesla} \quad ; \quad [m] = \frac{\mathrm{C\ m^2}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A\ m^2} \tag{3.2}$$

Adesso posso pensare di ricavare tutte le altre leggi postulando come ulteriore legge primaria il <u>principio di equivalenza di Ampère</u>.

principio di Ampère I parte, passivo. Una riflessione sulla differenza tra una corrente e una carica: una carica può essere concentrata, e al limite pensata come puntiforme, mentre una corrente deve venire da qualche parte e andare a finire da qualche parte, e quindi non può essere concentrata più che tanto; fisicamente, il sistema più semplice che possiamo immaginare è una spira (piuttosto che un tratto di filo) piana e piccolina.

Per calcolare l'energia di una spira percorsa da corrente immersa in un campo magnetico, andiamo a vedere quanto lavoro compie la forza magnetica se sposta la spira. La forza totale sulla spira è $\mathbf{F} = I \oint d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$, quindi il lavoro che il campo magnetico compie quando la spira si sposta, ciascun suo punto di un tratto $\mathbf{\Delta s}$ sarà $L = I \oint \mathbf{\Delta s} \cdot d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} = -I \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \wedge \mathbf{\Delta s}$; ma $d\mathbf{l} \wedge \mathbf{\Delta s}$ è l'elemento di superficie laterale uscente della figura solida descritta dalla spira muovendosi (una specie di salsiccia, o un tamburo), quindi l'integrale è il flusso di $\mathbf{B}$ uscente da questa superficie laterale. E siccome il flusso totale uscente da una superficie chiusa è zero, questo flusso sarà la variazione del flusso tra le due superfici terminali. Il lavoro sarà a spese dell'energia potenziale $L = -\Delta U_m$, quindi $U_m = -I \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Per una spira piana e piccola rispetto alla scala di disomogenità del campo magnetico possiamo porre semplicemente $U_m = -I\, \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$, che ci da la prima parte del principio di Ampère (in passivo); dall'espressione dell'energia U_m seguono le espressioni per il momento e per la forza, come in elettrostatica. Il principio giustifica anche la singolare scelta di dimensioni per i momenti magnetici.

principio di Ampère II parte, attivo, è invece da prendere come un fatto sperimentale ('il' fatto sperimentale base; mi piacerebbe poter dire che il passivo 'implica' l'attivo, che sarebbe una cosa profonda, ma non sono sicuro che sia vero). Il campo generato in $\mathbf{x}$ da un dipolo piazzato in $\mathbf{x}'$ lo prendiamo dall'analoga formula per un dipolo elettrico:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\nabla \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \tag{3.3}$$

Qui abbiamo introdotto una costante μ_0, che va misurata sperimentalmente e risulta essere pari a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{C}^2}$ (questa era una coincidenza numerica dovuta alla definizione del Coulomb, ma è stata elevata a standard metrico: il Coulomb è quella carica tale che $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \, \frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{C}^2}$). Il flusso del campo è zero su qualunque superficie chiusa (cfr. (1.9)), e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$.

Per avere un'espressione equivalente del campo magnetico di un dipolo magnetico del tipo $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, con $\mathbf{A}$ il potenziale vettore (che vedremo), notare che, per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \frac{\mathbf{m} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &= \mathbf{m} \left(\nabla \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\right) - (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \\ &= (\mathbf{m} \cdot \nabla)\, \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \nabla \left((\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\right) = -\nabla \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\end{aligned} \tag{3.4}$$

(nel passaggio dalla prima alla seconda riga ho usato il fatto che per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ la divergenza del campo di Coulomb è zero; nel penultimo passaggio, il fatto che ∇ e $\mathbf{m} \cdot \nabla$ commutano). Quindi ho:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \wedge \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \nabla \wedge \mathbf{A} \tag{3.5}$$

Adesso, se una spira piccola e piana è equivalente a un dipolo con $\mathbf{m} = I\, d\mathbf{S}$, una spira finita percorsa dalla corrente I, può essere pensata come somma di tante spire infinitesime disposte su una superficie S che ha il filo come bordo ∂S, e avrà quindi un campo magnetico con potenziale vettore (moltiplicato scalarmente per un un arbitrario vettore costante $\mathbf{a}$):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{a} \cdot I d\mathbf{S}' \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S I d\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \wedge \mathbf{a} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S I d\mathbf{S}' \nabla' \wedge \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S} \frac{I\, d\mathbf{l}' \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Eliminando $\mathbf{a}$ a destra e sinistra,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S} \frac{I\, d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}; \qquad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial S} \frac{I\, d\mathbf{l}' \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \tag{3.7}$$

che sono le "formula di Laplace" per il calcolo del campo magnetico prodotto da una spira C percorsa dalla corrente I; da cui segue in particolare la legge di Biot-Savart.

Una conseguenza rassicurante di questa formula è l'indipendenza del campo dalla superficie scelta, visto che il campo è scritto come un'integrale sul filo. Un'altra conseguemza è la Legge di Ampère. La circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo qualunque cammino chiuso C dà:

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C\oint_{\partial S}\frac{d\mathbf{l}\cdot d\mathbf{l}'\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = \begin{bmatrix} 0 & \text{se C non e' concatenato con } \partial S \\ \mu_0 I & \text{se C e' concatenato con } \partial S \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Questo integrale è stato calcolato per primo (credo) da Gauss, dimostrando anzitutto che il suo valore dipende solo dalla concatenazione dei due cammini, e non dalla loro particolare forma; e quindi deformandoli opportunamente, per es. uno a una retta (Biot-Savart) e l'altro a un circoletto intorno ad essa.

Andando a distribuzioni continue di corrente, $Id\mathbf{l} = \mathbf{J}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$, e le formule di Laplace diventano

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3\mathbf{x}'. \tag{3.9}$$

Osserviamo subito che che dall'espressione di $\mathbf{A}$ segue che:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3\mathbf{x}' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \Big(\nabla'\big(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\big) - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}')\Big)d^3\mathbf{x}'\end{aligned} \tag{3.10}$$

l'integrale sul volume del primo pezzo me lo cambio in un integrale di superficie, e sulla superficie deve essere $\mathbf{J} = 0$ (altrimenti mi sarei perso regioni in cui $\mathbf{J} \neq 0$). Il secondo pezzo è zero perché mi aspetto che $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$, cioè che le linee di corrente siano chiuse; e, in condizioni stazionarie, lo sono. Ne concludo che il potenziale vettore (3.9) soddisfa $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$. Invece, dalla espressione ottenuta per $\mathbf{B}$ possiamo ricavare le equazioni di Maxwell per il campo magnetico, nel vuoto e senza termine di spostamento (la derivazione è più complicata di quello che pensavo):

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3\mathbf{x}' = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla\wedge\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3\mathbf{x}' = 0. \\ \nabla\wedge\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\wedge\big(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\big)d^3\mathbf{x}' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \Big(\mathbf{J}(\mathbf{x}')\big(\nabla\cdot\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\big) - (\mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla)\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\Big)d^3\mathbf{x}'\end{aligned} \tag{3.11}$$

nel primo pezzo uso $\nabla\cdot\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = 4\pi\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ per ottenere la forma differenziale della legge di Ampère $\nabla\wedge\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}$; il secondo pezzo deve morire, e per ucciderlo uso uno un ragionamento analogo a quello usato per dedurre che $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$. Lo moltiplico scalarmente per un vettore costante $\mathbf{a}$, e manipolo come segue:

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla)\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\cdot\mathbf{a} &= (\mathbf{J}(\mathbf{x}')\cdot\nabla')\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\cdot\mathbf{a} = \\
&= \nabla'\big(\mathbf{J}(\mathbf{x}')\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\cdot\mathbf{a}\big) - (\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\cdot\mathbf{a})(\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x}'))
\end{aligned} \tag{3.12}$$

di nuovo, l'integrale sul volume del primo pezzo me lo cambio in un integrale di superficie, che si annulla, e impongo $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ per fare fuori il secondo pezzo.

Da queste equazioni di Maxwell è possibile tornare indietro alla fomula di Laplace ($\nabla\wedge(nbla\wedge\mathbf{B}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{B}$, e l'equazione di Poisson la sappiamo risolvere).

I campi elettrici e magnetici nella materia.

Nel resto di questo corso si parla per lo più di elettromagnetismo 'puro', cioè nel vuoto. Per Maxwell il vuoto era pieno di etere, e la distinzione tra vuoto e materia irrilevante; ma naturalmente l'argomento 'materia' è importante in generale e in tutte le applicazioni. Questi argomenti sono ampiamente trattati nel corso di elettromagnetismo, questo è un richiamo-riassunto-complemento, con qualche digressione.

In scala macroscopica un dielettrico polarizzato / materiale magnetizzato è uno in cui ogni elemento di volume d^3r ha un momento di dipolo elettrico $\mathbf{P}(\mathbf{x})d^3r$ / un momento di dipolo magnetico $\mathbf{M}(\mathbf{x})d^3r$. $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ sono grandezze locali ma macroscopiche, come del resto i campi $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, misurate mediando su un volume grande rispetto alla scala atomica, ma piccolo rispetto alla nostra. La scommessa è che questa scala esista, che possiamo ignorare le fluttuazioni, e che i risultati non dipendano dall'esatta determinazione di questa scala. Come vedremo, ci sono dei casi in cui la scommessa è persa.

Comincio col recuperare la discussione classica delle cariche di polarizzazione e delle correnti di magnetizzazione: calcolo il campo eletrico/magnetico generato da una polarizzazione/magetizzazione, per poi discuterne l'origine (che è molto più interessante).

Se un dielettrico polarizzato occupa un volume V delimitato da una superficie $S=\partial V$ genererà un campo elettrico (ricordando la formula per il potenziale generato da un dipolo)

$$\begin{aligned}
4\pi\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\nabla\int_V \frac{d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{x}')\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} = -\nabla\int_V d^3r'\mathbf{P}(\mathbf{x}')\cdot\nabla'\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \\
&= -\nabla\int_V d^3r'\Big(\nabla'\cdot(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}) - \frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big) = \\
&= -\nabla\Big(\int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')\cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \int_V d^3r'\frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

e cioè: il dielettrico polarizzato contribuisce al campo elettrico come una carica di superficie di densità $\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$, e una carica di volume di densità $\rho_p = -\nabla\cdot\mathbf{P}$; in tutti i casi elementari in cui la polarizzazione è proporzionale al campo elettrico $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, con suscettività dielettrica χ_e uniforme avremo $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ in assenza di cariche, e ci si può tranquillamente dimenticare della carica di volume. Se supponiamo invece che il dielettrico degradi in modo continuo al nulla; cioè che non ci siano superfici di discontinuità, ma magari cariche di volume con densità ρ, allora avremo, dalla legge di Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) =: \nabla \cdot D = \rho \tag{3.14}$$

E' chiaro che per fare un ragionamento 'differenziale' devo supporre che le funzioni che tratto siano continue e differenziabili, che può apparire strano dato che tutti i modelli che poi faccio contengono abbondanti discontinuità: così è la vita. Però è importante rendersi conto che il trattamento delle discontinuità è dettato dalla relazione differenziale. Faccio un esempio: prendo una funzione continua e differenziabile $\theta_\epsilon(x)$ che sia $= 0$ per $x < 0$, $= 1$ per $x > \epsilon$ con $\epsilon > 0$ 'piccolo a piacere'; tra 0 e ϵ la funzione cresce monotonicamente da 0 a 1 e ha derivata positiva, nulla per $x = 0,\ x = \epsilon$. Posso approssimare la polarizzazione di una lastra di dielettrico spessa a, disposta tra i piani $x = 0,\ x = a$, con $P_x = P=$ costante, con la funzione $P_x(x) = \big(\theta_\epsilon(x) - \theta_\epsilon(x - a)\big)P$. Con questa approssimazione ho abolito i 'bordi' del dielettrico, e le relative cariche superficiali, ma ho introdotto cariche di polarizzazione di volume. Per una bordo S della lastra saranno in tutto:

sulla faccia $x = 0$ $q = S \int_0^\epsilon (-\partial_x (P\theta_\epsilon(x))dx = -PS$
sulla faccia $x = a$ $q = S \int_a^{a+\epsilon} (-\partial_x (-P\theta_\epsilon(x - a))dx = PS$

esattamente come mi aspetto per superfici di discontinuità.

Per il campo magnetico generato da una magnetizzazione $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ serve un'ennesima acrobazia vettoriale per poter interpretare il risultato come dovuto a 'correnti di magnetizzazione', di volume e di superficie. (Questa è un'altra versione del principio di equivalenza di Ampère; riporto qui l'acrobazia, ma se non ha particolare importanza).

Una distribuzione di dipoli magnetici genererà, per la (3.5), un campo magnetico:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \wedge \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3r' = \nabla \wedge \int_\mathcal{V} \mathbf{M}(\mathbf{x}') \wedge \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3r' = \\ &= \nabla \wedge \int_\mathcal{V} \Big(-\nabla' \wedge \big(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\big) + \frac{\nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big) d^3r' \end{aligned} \tag{3.15}$$

Il secondo pezzo da' il campo generato da una densità di corrente $\nabla \wedge \mathbf{M}$ (A/m^2):

$$\nabla \wedge \int_V \frac{\nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3r' = \int_V \frac{\big(\nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}')\big) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3r' \tag{3.16}$$

mentre il primo pezzo, per la (1.9) (a qualcosa serviva!), da':

$$\begin{aligned} -\nabla \wedge \int_\mathcal{V} \Big(\nabla' \wedge \big(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\big) d^3\mathbf{x}' &= \nabla \wedge \int_S \frac{d\mathbf{S}' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \\ = \int_S \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \wedge \frac{d\mathbf{S}' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \int_S \frac{\big(\mathbf{M}(\mathbf{x}') \wedge d\mathbf{S}'\big) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned} \tag{3.17}$$

che è il campo generato da una corrente superficiale di densità $\mathbf{M} \wedge \mathbf{n}$ (A/m).

Supponendo che non ci siano superfici di discontinuità, dalla legge di Ampère:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \nabla \wedge \mathbf{M}) \quad \rightarrow \quad \nabla \wedge (\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}) := \nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{3.18}$$

Teoria fenomenologica della suscettività dielettrica, cenno alla teoria di Landau.

I padri dell'elettromagnetismo erano convinti atomisti, ma non avevano nessuna idea delle dimensioni atomiche; in questo contesto la loro ingegnosità è ammirevole. L'idea del 'campo medio' è la base della teoria elementare della polarizzazione dei dielettrici: le interazioni tra i costituenti della materia sono schematizzate supponendo che ogni costituente sia soggetto a un campo che rappresenta l'azione di tutti gli altri costituenti, oltre che all'azione del campo esterno. E' un'idea molto generale e di larghissima applicazione in struttura della materia, di cui quello che segue è un esempio emblematico.

I costituenti del dielettrico (atomi, molecole) acquistano un momento di dipolo elettrico in presenza di un campo elettrico. Ma il singolo costituente non sa nulla del campo $\mathbf{E}$, ottenuto mediando su un volume 'grande' (rispetto al suo); il suo 'ambiente' è schematizzato come una cavità sferica all'interno del dielettrico polarizzato, di raggio a. Se $\mathbf{P} = (0, 0, P)$ sulle pareti interne della cavità ci sarà una carica $\sigma_P \, dS = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, dS = -P \cos\theta \, a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$, che al centro della cavità, dove abbiamo piazzato il costituente, darà un campo elettrico lungo l'asse z:

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{P \cos^2\theta \, a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{a^2} = \frac{P}{3\epsilon_0} \tag{3.19}$$

(ho usato $\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \int_{-1}^1 \cos^2\theta \, d(\cos\theta) = \frac{2}{3}$). Il costituente acquisterà quindi un momento di dipolo proporzionale a un campo $E_{eff} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$. Chiamiamo $\alpha\epsilon_0$ la costante di proporzionalità ('polarizzabilità'), n=numero di costituenti/m^3 e abbiamo:

$$\mathbf{P} = n\alpha\epsilon_0(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{n\alpha\epsilon_0}{1 - \frac{1}{3}n\alpha}\mathbf{E} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E} \tag{3.20}$$

Da questa si deduce per la costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1 + \chi_e$

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3}n\alpha \tag{3.21}$$

che è l'equazione di Clausius-Mossotti; a quanto pare, ben verificata sperimentalmente per i gas, ma anche per liquidi e molti solidi (si suppone α costante e si misura ϵ_r al variare della densità). Una applicazione alle frequenze ottiche dà la 'equazione di Lorentz-Lorenz'. Nella sua semplicità, questo ragionamento mi sembra un capolavoro.

Che dire di α? se il costituente ha un suo momento di dipolo elettrico p_0, la polarizzazione sarà dovuta alla competizione tra l'energia di orientamento $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$ e quella dovuta al disordine molecolare $k_B T$, e quindi ci si aspetta $\alpha \sim \frac{p_0^2}{T}$. Se invece il dipolo indotto è dovuto a una deformazione del costituente, l'effetto sarà indipendente dalla temperatura.

Considerazioni analoghe valgono per la magnetizzazione dei materiali diamagnetici o paramagnetici. Ma nel caso dei ferromagneti accade qualcosa di nuovo; c'è una forte interazione tra i costituenti (tipicamente, la forza di scambio di Majorana-Heisemberg tende ad allineare i dipoli elementari), e la risposta del materiale ai campi esterni è completamente non-lineare, fino ad arrivare a una magnetizzazione di saturazione per forti campi esterni. Ma la situazione più interessante la si ha già per deboli campi esterni, al variare della temperatura. Al di sopra di una temperatura critica T_c (temperatura di Curie) prevale il disordine molecolare, e il materiale ha un comportamento più o meno paramagnetico; al di sotto di T_c si formano domini di Weiss permanentemente magnetizzati. Si ha quindi una transizione di fase (di seconda specie, senza calore di transizione). L'analisi termodinamica di questo tipo di transizioni, nell'ambito delle teorie di tipo 'campo medio', è stata formulata da Landau (1937), e ha avuto un importanza cruciale in tutta la fisica moderna, sia in meccanica statistica che nelle teorie delle particelle elementari. Provo ad accennarla brevemente, trascurando (parecchie) sottigliezze.

L'idea di partenza è che si possa scrivere l'energia libera di Gibbs[3] di un ferromagnete come funzione di p, T, $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{M}$. Ora, che si possa trattare $\mathbf{M}$, battezzato 'parametro d'ordine' della transizione, come una variabile indipendente non è affatto ovvio; all'equilibrio $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{eq}$, ma Landau argomenta che ci possono essere stati metastabili con $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}_{eq}$ con un'energia libera ben definita e in linea di principio misurabile; ciò posto, propone per G lo sviluppo:

$$G = G_0 + \frac{1}{2}a(T - T_c)\mathbf{M}^2 + \frac{1}{4!}b(\mathbf{M}^2)^2 + ... - c\mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \tag{3.22}$$

con $a,\ b,\ c\ > 0$ (notare che $b < 0$ porterebbe il sistema al collasso), e

$$\frac{\partial G}{\partial M_i} = a(T - T_c)M_i + \frac{1}{3!}bM_i\,\mathbf{M}^2 - cH_i \tag{3.23}$$

Per farsi un'idea, conviene pensare a $\mathbf{M}$ come un vettore bidimensionale, e per dato T al grafico di $G(M_1, M_2)$ con G sull'asse verticale.

---

[3] per un fluido termodinamico $G = U - TS + pV$; siccome $dU = TdS - pdV$, $dG = -SdT + Vdp$, quindi $G = G(P,T)$ è funzione delle variabili 'intensive'. Ma in realtà quella che qui chiamo G non coincide con la G di Gibbs, e sarebbe meglio chiamarla l'energia libera di Landau.

Per $T > T_c$ tutto è normale, e per $\mathbf{H} = 0$ il minimo di G è per $\mathbf{M} = 0$. Per $\mathbf{H} \neq 0$ all'equilibrio $\frac{\partial G}{\partial M_i} = 0$, e se trascuriamo il termine quadratico abbiamo una suscettività magnetica $\chi_m = \frac{H_i}{M_i} = \frac{c}{a(T-T_c)}$, che è la legge di Curie-Weiss. Notare che χ_m diverge quando $T \to T_c$.

Per $T < T_c$ la situazione è drasticamente diversa: con un campo forzante $\mathbf{H} = 0$, il grafico della funzione $G(\mathbf{M})$ ha la forma un sombrero messicano, con un <u>massimo</u> a $\mathbf{M} = 0$ e il minimo per

$$\mathbf{M}_{eq}^2 = \frac{3!\, a(T_c - T)}{b}$$

cioè in un punto della falda del sombrero; ma quale punto? Per arrivare all'equilibrio al sistema serve una <u>rottura spontanea della simmetria per rotazioni</u>, perché <u>deve</u> scegliere una direzione per la magnetizzazione $\mathbf{M}_{eq}$; si trova nella situazione dell'asino di Buridano (animale razionale e dotato di libero arbitrio, di fronte a due identici cumuli di fieno muore di fame perchè non ha modo di scegliere). Se c'è un campo forzante $\mathbf{H}$, per piccolo che sia, il sombrero si inclina leggermente e il minimo sarà per $\mathbf{M}_{eq}$ parallelo ad $\mathbf{H}$. Comunque, una volta che il sistema ha scelto una direzione, non sarà facile fargli cambiare idea; a questo livello di approssimazione troviamo suscettività magnetica zero per $\mathbf{H}$ perpendicolare a $\mathbf{M}_{eq}$; nella direzione di $\mathbf{M}_{eq}$ ho $c\,\delta H = a(T - T_c)(M_{eq} + \delta M) + \frac{b}{3!}(M_{eq} + \delta M)(M_{eq}^2 + 2M_{eq}\,\delta M + ..) = \frac{b}{3}M_{eq}^2\delta M$, quindi $\chi_m = \frac{c}{2a(T_c-T)}$, che di nuovo diverge per $T \to T_c$.

Tutti i parametri termodinamici sono non-analitici per $T \sim T_c$; ma la sorpresa finale è che la teoria predice 'indici critici', cioè gradi di divergenza, <u>tutti</u> in disaccordo con i fatti sperimentali. Per es. la suscettività diverge come $1/|T - T_c|^\gamma$ con $\gamma \simeq 1.3$ e non 1, M_{eq} va come $|T - T_c|^\beta$ con $\beta \simeq 0.35$ e non $\frac{1}{2}$ e così via. Landau stesso aveva individuato il motivo: siccome intorno al punto critico la suscettività diverge, le fluttuazioni diventano macroscopiche e vengono meno le ipotesi alla base di tutto il discorso. Il superamento di queste difficoltà è venuto negli anni 70 con i lavori di Ken Wilson (Nobel 1981) e altri sul gruppo di rinormalizzazione, una tappa fondamentale della fisica moderna.

Su questo argomento, a parte i libri di Landau e Lifschitz, raccomando vivamente il cap.10 del libro di termodinamica di H.B. Callen; discute in dettaglio il punto critico dell'equazione di Van der Waals, ma non è un libro facile.

Esempi classici di rottura spontanea di simmetria.
Il primo mi è stato raccontato quando ero studente da Gianni Jona Lasinio (a cui andava assegnato il Nobel insieme a Y. Nambu). Considero un cilindro di metallo poggiato su un piano, alto h e di diametro a, soggetto a una forte pressione assiale p. C'è perfetta simmetria assiale. Se il cilindro è per es. una monetina, $h << a$ si schiaccerà; ma se è invece per es. un chiodo, $h >> a$, è esperienza comune che si storcerà, in una qualche direzione, e addio simmetria assiale. In inglese si dice 'buckling', raccomando Wikipedia.

Il secondo esempio, non completamente calzante, è il regolatore di Watt (schematizzato; ci vorrebbe un disegno). Ho una massa m appesa con una stecca lunga l (di massa trascurabile) in modo da poter oscillare in qualunque direzione. La stecca viene fatta girare intorno alla verticale. La lagrangeana e le equazioni del moto saranno:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(l\,\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}m(l\sin\theta\dot\varphi)^2 - mgl(1-\cos\theta),$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\big(ml^2\sin^2\theta\dot\varphi\big) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = ml^2\ddot\theta - ml^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2 + mgl\sin\theta = 0$$

Se la stecca non oscilla $\dot\theta = 0$, $\dot\varphi = \Omega$ =cost.; per piccoli Ω la stecca resta verticale, $\theta = 0$, mentre per $\frac{g}{\Omega^2 l} < 1$ sarà $\cos\theta = \frac{g}{\Omega^2 l}$. Possiamo interpretare questa biforcazione prendendo $\widetilde{V} = mgl(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}m(\Omega l\sin\theta)^2$, che ha un minimo in $\theta = 0$ che diventa un massimo a $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Altri esempi vengono dalla fluidodinamica: l'acqua che esce svuotando un lavandino potrebbe andare dritta, concentricamente, ma in pratica si mette a girare (Coriolis; chi andasse molto a sud dell'equatore controlli); scaldando acqua in un pentolino si innesca la convezione, etc..

Magneti di tipo 'dipolo' e 'quadrupolo' e loro uso nelle macchine acceletrici, cfr. [8], cap.8, o [1], cap. .

Preliminarmente, ricordo che per un elettromagnete a forma di C, fatto avvolgendo N spire su un ferro dolce lungo f, con un traferro t si calcola (approssimativamente) il campo magnetico con la legge di Ampère; finché si è in zona lineare avremo:

$$NI = \frac{B}{\mu_0}t + \frac{B}{\mu_0\mu_r}f \quad\rightarrow\quad B = \frac{\mu_0 NI}{t + f/\mu_r} \simeq \frac{\mu_0 NI}{t}$$

(se tipicamente $t >> f/\mu_r$). Quando si arriva a saturazione invece, si ha:

$$NI = \frac{B}{\mu_0}t + (\frac{B}{\mu_0} - M)f \quad\rightarrow\quad B = \frac{\mu_0 NI + \mu_0 Mf}{t+f} \simeq \mu_0 M + \frac{\mu_0 NI}{t+f}$$

Aumentare la corrente non da' grandi guadagni (a meno di non usare superconduttori), e il massimo che si riesce ad avere è $B \sim \mu_0 M \sim 2\,\mathrm{T}$ con i normali materiali magnetici. Per avere un'idea, i 9300 'dipoli' a superconduttore per LHC al CERN funzionano a 1.9 K, e danno un campo $B = 8.33\,\mathrm{T}$. Questi sono i magneti che, deviando i fasci di particelle, li fanno girare nell'anello. La relazione tra quantità di moto di una particella, campo magnetico e raggio di curvatura della traiettoria è $p = eBR$, e per particelle relativistiche $p \simeq \mathcal{E}/c$; particelle con $\mathcal{E} \simeq 7$ TeV avranno raggio di curvatura $R = \frac{7\cdot 10^{12} e}{e\, 3\cdot 10^8\, 8.33} \simeq 2800$ m (l'anello ha raggio 4297 m, 27 km di circonferenza).

Per 'concentrare' un fascio di particelle cariche occorrono invece magneti di tipo 'quadrupolo', che agiscono più o meno come lenti[4] La sezione di un magnete di tipo quadrupolo è mostrata in figura (copiata da [9]).

[4] nei tubi a raggi catodici il fascetto di elettroni viene messo a fuoco da 'lenti' elettrostatiche e magnetiche molto più economiche.

Nella zona intorno all'origine del piano (x,y) in cui passa il fascio di particelle con velocità $\mathbf{v} = \hat{k}v$ (e carica positiva), $\mathbf{B} = \nabla V \simeq \nabla gxy$, $e\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = gv(-\hat{\imath}x+\hat{\jmath}y)$, g='gradiente magnetico', un valore realistico pare sia g=10 T/m. Particelle nel piano $y = 0$ saranno deviate verso l'asse z, quindi concentrate, quelle nel piano x=0 disperse. Per es. se il magnete è lungo L (diciamo 33 cm) una particella relativistica che passa con $y = 0, x > 0$ sarà deviata di un angolo α tale che $\alpha R \simeq L$, con $R = \frac{\mathcal{E}}{ecB} = \frac{\mathcal{E}}{ecgx}$, e incrocierà l'asse z a una distanza f tale che $\alpha \simeq \frac{x}{f}$; pertanto $f = \frac{\mathcal{E}}{ecgL}$ non dipende da x, ed è la 'lunghezza focale' del magnete; con i numeri dati e positroni da 1 GeV mi viene $f \simeq 1$ m (guarda caso). Naturalmente f è negativo per particelle che passano con $x = 0, y \neq 0$, ma la formula di ottica per i sistemi di due lenti distanti d

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

(che tutti conoscono) implica che con due quadrupoli successivi incrociati si riesce, bene o male, a concentrare il fascio.

4. I potenziali elettromagnetici.

C'è tutta una serie di dimostrazioni in elettromagnetiso che richiede di passare per i "potenziali elettromagnetici" $(\phi, \mathbf{A})$. Questo passaggio formale ha però un'importanza che va molto al di la' del contesto elettromagnetico, tanto da giocare un ruolo cruciale nella fisica teorica moderna; in particolare, vedremo che in meccanica quantistica il passaggio non è affatto formale. Per una discussione dettagliata rimando al §10.11 di [1], e mi limito a ricordare che dalle equazioni di Maxwell omogenee:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.1}$$

(che, ricordo, sono omogenee perché non esistono cariche magnetiche) segue che esistono $(\phi, \mathbf{A})$ tali che:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \tag{4.2}$$

Per es. se $\mathbf{B}$ è uniforme, possiamo prendere $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{x}$. I potenziali elettromagnetici però <u>non</u> sono univocamente determinati; $(\phi, \mathbf{A})$ e $(\phi', \mathbf{A}')$ descrivono gli stessi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ se esiste una funzione $\chi(\mathbf{x}, t)$ tale che

$$\phi' - \phi = -\frac{\partial \chi}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla\chi \tag{4.3}$$

(come si vede dalla (4.1)); ogni funzione $\chi(\mathbf{x}, t)$ determina quindi una 'trasformazione di gauge' [5] dei potenziali e.m.. Siccome posso fare trasformazioni di gauge, $(\phi, \mathbf{A})$ non hanno,

[5] questa parola, che viene usata in inglese per es. in riferimento allo scartamento ferroviario, è stata introdotta da H. Weyl ed è rimasta nell'uso.

punto per punto, nessun significato fisico; però per es. la circuitazione di $\mathbf{A}$ su un cammino chiuso è perfettamente ben definita, ed è pari al flusso di $\mathbf{B}$ su una superficie che lo ha come bordo.

In particolare, possiamo usare le trasformazioni di gauge per far sì che i potenziali e.m. soddisfino una qualche equazione supplementare (una 'condizione di gauge') che semplifica e rende possibile risolvere le altre equazioni di Maxwell. Usando le identità si trova infatti che, espresse in termini dei potenziali, queste acquistano la forma poco attraente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Non è possibile, con queste equazioni, calcolare univocamente l'evoluzione temporale di $(\phi, \mathbf{A})$, proprio perché posso modificare qualunque soluzione con una trf. di gauge; le equazioni diventano univocamente solubili 'fissando il gauge'.

Due particolari condizioni di gauge risultano convenienti. Per entrambe si può dimostrare (lo vedremo piú oltre) che una esiste sempre una trf. di gauge che porta i potenziali e.m. a soddisfarle. In entrambe i casi le (4.4) si semplificano nettamente.
'<u>il gauge di Lorenz</u>'[6] , caratterizzato dalla 'condizione di Lorenz':

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad \rightarrow \qquad & \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ & \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \tag{4.5}$$

($\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$). Con questa scelta otteniamo quattro equazione di D'Alembert non omogenee, che vedremo come risolvere.
'<u>il gauge di radiazione</u>' (o '<u>di Coulomb</u>')

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad \rightarrow \qquad & \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ & \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Con questa scelta ritroviamo intatta l'equazione di Poisson per ϕ, equazione che con $\phi(\infty) = 0$ già sappiamo risolvere, ma se ρ dipende dal tempo la sua soluzione entra come sorgente nelle equazioni di D'Alembert non omogenee per le tre componenti di A.

I potenziali elettromagnetici in meccanica quantistica.

[6] Nelle ultime edizioni Jackson dice che l'idea è in realtà del fisico danese Ludvig V. Lorenz, e non del molto più famoso olandese Hendrik A. Lorentz; e ha tolto la t.

Con la solita inconsistenza, in questo paragrafo uso il sistema di Heavyside-Lorentz; le equazioni diventano:

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \ ; \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \iff A^\mu := (\Phi, \mathbf{A}) \tag{4.7}$$

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi \ ; \quad \Phi \to \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \iff \quad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \chi \tag{4.8}$$

Anche se privi di un significato fisico diretto in fisica classica, i potenziali e.m. sono onnipresenti in meccanica quantistica. Un primo motivo, formale, è che, usando i potenziali e.m., abbiamo un modo semplice ed elegante per scrivere l'eq. di Schrödinger (e poi le equazioni per i campi relativistici) per una particella di carica q in un campo e.m.[7], noto come la "sostituzione minimale":

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\Phi \ ; \quad \frac{\hbar}{i}\nabla \to \frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} \quad \iff \quad i\hbar\partial_\mu \to i\hbar\partial_\mu - \frac{q}{c}A_\mu \tag{4.9}$$

che da un'equazione invariante per trf. di gauge che cambiano localmente la fase della funzione d'onda di una particella carica:

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\chi \ ; \quad \Phi \to \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \ ; \qquad \psi \to e^{i\frac{q}{\hbar c}\chi}\,\psi \tag{4.10}$$

Un motivo più convincente è l'esistenza di effetti quantistici che non possono essere descritti altro che attraverso i potenziali e.m.[8]. Ne menziono tre che mi sembrano particolarmente interessanti.

Consideriamo un solenoide, lungo e sottile, diciamo con l'asse sull'asse z e di raggio R; al suo interno il campo magnetico $\mathbf{B}$ è costante, all'esterno è zero; $\mathbf{A}$ *deve* essere continuo (una discontinuità produrrebbe campi infiniti), e può essere preso:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{r} \ , \ \text{per } |\mathbf{r}_\perp| < R \ ; \qquad \mathbf{A} = R^2 \frac{\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}}{2\mathbf{r}_\perp^2} \ , \ \text{per } |\mathbf{r}_\perp| > R$$

---

[7] in meccanica classica si dà una bella espressione per la Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 + q\Phi$$

da cui segue (esercizio: dalle eq. di Hamilton $\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, si ricava $m\ddot q_i = -q\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{q}{c}\dot q_j(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j})$) che la particella è accelerata dalla forza di Lorentz. Le trf. di gauge sono trf. canoniche $(x_i, p_i) \to (X_i, P_i)$, con $X_i = x_i$, $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$ e $S(x, P) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{P} - \frac{q}{c}\chi$, $H \to H' = H - \frac{q}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$. La corrispondente Lagrangeana è $L = \frac{1}{2}m\,\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{r}} - q\Phi$.

[8] cfr. per es. The Feynman Lectures in Physics, II 15-5

Un fascio di particelle cariche che si diffrange intorno al solenoide è sensibile al potenziale **A** esterno, nonostante che **B** sia zero, e che le particelle *non* abbiano accesso all'interno del solenoide. Infatti l'eq. di Schrödinger "esterna":

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2\psi$$

avrà soluzioni

$$\psi = Ke^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr}-Et)}\exp[\frac{iq}{\hbar c}\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}\mathbf{A}(\mathbf{r}')\cdot d\mathbf{r}']$$

dove, siccome $\nabla \wedge \mathbf{A} = 0$, l'integrale di linea non dipende dal particolare cammino, finché questo sta da una parte o dall'altra del solenoide. Tra queste due possibilità c'è una differenza di fase:

$$\Delta\phi = \frac{q}{\hbar c}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{\hbar c}|\mathbf{B}|\pi R^2$$

che dà luogo a uno spostamento complessivo della figura di diffrazione perfettamente osservabile, e sperimentalmente osservato abbastanza facilmente. Questo è l'effetto Aharanov - Bohm (Y. Aharanov e D. Bohm, Phys.Rev 115, 485 (1959)).

Il secondo "fenomeno" è molto più speculativo[9], e potrebbe non avere riscontro sperimentale. Supponiamo che da qualche parte nell'Universo esista un monopolo magnetico, con una carica magnetica g e un campo magnetico:

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

che soddisfa $\nabla\cdot\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{B} = 0$ per $\mathbf{r} \neq 0$. Però è impossibile trovare un **A** tale che $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ovunque. Il meglio che si può fare è, in coordinate polari:

$$\mathbf{A} = (A_r,\, A_\theta,\, A_\varphi)\ :\ A_r = A_\theta = 0\ ,\, A_\varphi = \frac{g}{4\pi|\mathbf{r}|}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

(in coordinate cartesiane $\mathbf{A} = \frac{g}{4\pi|\mathbf{r}|(|\mathbf{x}|+z)}(\hat{\mathbf{i}}\,y - \hat{\mathbf{j}}\,x)$) che va bene ovunque tranne che lungo l'asse z negativo, arbitrariamente scelto. Questo è spiacevole; sarebbe vieppiù spiacevole se qualcuno fosse in grado di rivelare la mia arbitraria scelta con un esperimento di tipo Aharanov–Bohm, cioè diffrangendo particelle di carica q intorno all'asse z negativo, dove si troverebbe una differenza di fase

$$\Delta\phi = \frac{q}{\hbar c}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \lim_{\theta\to\pi}\frac{q}{\hbar c}\int_0^{2\pi} A_\varphi\,|\mathbf{r}|\sin\theta d\varphi = \frac{qg}{\hbar c}$$

[9] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) A133 (1931) 60. Letto tanti anni dopo, questo articolo è ancora straordinario, chi lo volesse me ne chieda una copia.

a <u>qualunque distanza</u>. Perché questo non succeda, $\Delta\phi$ deve essere un multiplo di 2π, e quindi *tutte* le cariche presenti nell'Universo devono essere multiple di:

$$e = 2\pi\frac{\hbar c}{g}$$

L'ipotesi che esistano monopoli spiega perché tutte le cariche osservate sono multiple della carica dell'elettrone, e predice anche la carica del monopolo!
Questo straordinario ragionamento ha indotto una letteratura sterminata, fatto e distrutto carriere, e ha anche fatto scavare un buco gigantesco sotto il Gran Sasso, dedicato tralaltro alla ricerca di un eventuale monopolo.

L'idea che ci possano essere dei monopoli, e in generale della carica magnetica, non è poi così peregrina, e classicamente non creerebbe nessun problema alla teoria. Se avesse pensato che ci potesse essere una densità di carica magnetica ρ_m e una corrente di carica magnetica $\mathbf{J}_m$, presumo che Maxwell non avrebbe fatto una piega, e avrebbe scritto due delle sue equazioni $\nabla\cdot\mathbf{B} = \rho_m,\ \nabla\wedge\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{J}_m - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$. Ci sarebbe stata allora perfetta simmetria tra l'elettrico e il magnetico, come si vede scrivendo le equazioni di Maxwell nella forma $\nabla\cdot(\mathbf{E}+i\mathbf{B}) = (\rho+i\rho_m),\ \nabla\wedge(\mathbf{E}+i\mathbf{B}) = \frac{i}{c}((\mathbf{J}+i\mathbf{J}_m)+\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+i\mathbf{B}))$. Con la meccanica quantistica invece si scopre che, così come per l'equazione di Schrödinger dobbiamo distinguere tra le p e le q, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ prendono strade diverse, e non possiamo trattarli sullo stesso piano.

Se ci sono più monopoli, con cariche magnetiche ed elettriche ('dioni'), si ottengono delle regole di quantizzazione complicate, che sono state derivate da J. Schwinger e D. Zwanziger negli anni '70, e risolte da uno studente particolarmente brillante di nome Edward Witten.

Superconduttività, effetto Meissner, quantizzazione del flusso magnetico. Cfr. 'The Feynman Lectures', vol.III, cap.21. Questo capitolo è bellissimo e vivamente raccomandato, non solo per il suo contenuto, ma anche semplicemente per avere un'idea della straordinaria personalità scientifica di Richard Feynman. Per il programma del corso sono rilevanti i paragrafi fino al 7. Notare il collegamento con la discussione dell'effetto pelle nelle pagine successive di questa dispensa.

Ne tento un breve riassunto. La superconduttività, scoperta da Kamerlingh Onnes nel 1911, è l'improvviso azzerarsi della resistività dei metalli al di sotto di una temperatura critica; secondo la teoria di Bardeen, Cooper e Schrieffer (BCS, 1957) è dovuta al formarsi di labili 'coppie di Cooper' di elettroni, per una forza attrattiva che ha origine dall'interazione tra gli elettroni di conduzione e le vibrazioni del reticolo cristallino. Le coppie sono bosoni, e condensano à la Bose per $T \approx 0$, sicché l'equazione di Schrödinger per una coppia descrive il comportamento macroscopico dell'insieme delle coppie. Supponiaamo di avere un campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A}$, con $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ e scriviamo $\psi = \widetilde{\rho}e^{i\Theta}$;

dall'eq. di Schrödinger (scritta con la sostituzione minimale (4.9), ma in MKS) segue la legge di conservazione del flusso

$$\frac{\partial \widetilde{\rho}^2}{\partial t} + \nabla \cdot \widetilde{\mathbf{j}} = 0 \ , \quad \widetilde{\mathbf{j}} = \frac{1}{2m}\big(\psi^*(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A})\psi - \psi(\frac{\hbar}{i}\nabla + q\mathbf{A})\psi^*\big)$$

In condizioni stazionarie ne segue che $\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{j}} = 0$. Questo $\widetilde{\mathbf{j}}$ è quello che ci aspettiamo sia connesso con il flusso delle coppie di Cooper, con una densità di corrente elettrica $\mathbf{J} \sim q\widetilde{\mathbf{j}}$. Ci aspettiamo poi che $\nabla \widetilde{\rho} = 0$, perché non ci sono accumuli di carica, e quindi $\widetilde{\mathbf{j}} = \frac{1}{m}(\hbar\nabla\Theta - q\mathbf{A})\widetilde{\rho}^2$, e $\nabla^2\Theta = 0$ (con condizioni al contorno $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\Theta = 0$). Per un blocco di materiale questo implica Θ =cost. e quindi $\widetilde{\mathbf{j}} = -\frac{q}{m}\widetilde{\rho}^2\mathbf{A}$. In termini di corrente elettrica

$$\mathbf{J} = -\frac{q^2 n}{m}\mathbf{A}$$

n il numero di coppie/m^3; questa è l'equazione suggerita da F. e H. London nel 1935 per spiegare l'effetto Meissner: l'espulsione del campo magnetico dal blocco di materiale superconduttore.

E infatti, dalla legge di Ampère $\nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J} = -\frac{q^2 n\mu}{m}\mathbf{A} = -\lambda^2\mathbf{A}$, ($1/\lambda$ = la 'profondità di pelle magnetica') con tipica soluzione $A \sim e^{-\lambda x}$. Per il rame ($n \simeq \frac{9.\,10^3}{63.5\cdot 10^{-3}}\mathcal{N} \simeq 0.85 \cdot 10^{29}\ atomi/m^3,\ m \simeq 9.1 \cdot 10^{-31}\ kg,\ q \simeq 1.6 \cdot 10^{-19}$) mi viene $1/\lambda \simeq 1.83 \cdot 10^{-8}\ m$. La (super)corrente circola quindi solo in una 'pelle' di questo spessore. Se però il superconduttore è un anello c'è la possibilità che Θ non sia costante, ma sia $\Theta = k\varphi$ (k intero, perché ψ deve avere un valore ben definito in ogni punto), che varia su scala macroscopica. La supercorrente è ancora confinata alla pelle dell'anello, e nel 'bulk' $\mathbf{J} = 0$; questo implica adesso che nel bulk

$$\hbar\nabla\Theta = q\mathbf{A} \ .$$

Questo $\mathbf{A}$ è lo stesso che avevamo incontrato nell'effetto Aharanov-Bohm, esplicitamente $\mathbf{A} = \frac{\hbar k}{q}\frac{-\hat{\mathbf{i}}y+\hat{\mathbf{j}}x}{x^2+y^2}$, e $\nabla \wedge \mathbf{A} = 0$. Prendendo la circuitazione, si trova che il flusso del campo magnetico attraverso l'anello è quantizzato,

$$\Phi_B = \frac{2\pi k\hbar}{q}$$

Questa sorprendente conclusione è stata verificata sperimentalmente nel 1961 da Deaver e Fairbank e da Doll e Näbauer (uno splendido esperimento, cfr. Feynman, o l'articolo in Phys.Rev.Lett. 7(1961)43, seguito da un articolo teorico di N. Byers e C.N. Yang), che trovano $q = 2e$, confermando così la teoria BCS. Il flusso elementare $\frac{2\pi\hbar}{2e} = 2.07\cdot 10^{-15}\ T\,m^2$ è piccolino, ma facendo oscillare il campione (minuscolo) a $\nu = 100\ Hz$ induce una f.e.m. misurabile su una bobina di 10^4 spire.

Il peso relativo del termine di Maxwell.

Come spiegato nel testo[1], il termine di Maxwell nell'equazione di Ampère:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4.11}$$

è cruciale per l'esistenza delle onde elettromagnetiche, ma difficile da evidenziare sperimentalmente in modo diretto. Questo genera uno strano paradosso: consideriamo per es. una radio, o un telefonino. L'antenna sembra interfacciare due diversi 'elettromagnetismi': all'esterno il termine di Maxwell domina, anche perché non ci sono affatto correnti. All'interno invece i circuiti, per complicati che siano, sono progettati con le regole dell'elettronica, cfr. per es. [10], in cui il termine di Maxwell non compare neanche nell'indice. Fino a che punto è lecito trascurarlo? L'argomento che segue (preso dal libro di Fisica II di E. Amaldi) è grossolano, ma da' probabilmente la risposta corretta. Consideriamo un filo lungo l e di sezione a^2, resistenza R, percorso da una corrente di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$; prendo $\frac{\partial E}{\partial t} \approx \omega \frac{V}{l}$, $J \approx \frac{V}{Ra^2}$, $\epsilon_0 c = \frac{1}{Z_0}$, $Z_0 \simeq 377\ \Omega$ e ho:

$$\frac{\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}{J} \approx \frac{\epsilon_0 \omega \frac{V}{l}}{\frac{V}{Ra^2}} = 2\pi \frac{R\epsilon_0 c a^2}{\lambda l} \approx 2\pi\, \frac{R}{Z_0}\, \frac{L}{\lambda}$$

dove $L \approx \frac{a^2}{l}$ viene inteso come 'dimensione tipica' del sistema (l'ipotesi più discutibile). Perché valga l'approssimazione 'quasi stazionaria' è necessario quindi che sia:

$$\frac{R}{Z_0}\, \frac{L}{\lambda} << 1 \tag{4.12}$$

Pertanto il sistema deve: avere dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda dei segnali che processa, o periodi lunghi rispetto al tempo di transito della luce attraverso di esso (la luce viaggia a 30 cm/ns); e resistenze piccole rispetto a Z_0. L'antenna (per es., quel pezzo di filo che penzola dalla mia radiosveglia) dovrà essere 'grande' rispetto al circuito, tipicamente di dimensioni comparabili con la lunghezza d'onda del segnala che deve ricevere o trasmettere (per un telefonino, $\nu \simeq 1\ GHz,\ \lambda \simeq 30$ cm).

Detta in altro modo: in un conduttore $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$, con $\rho \approx 10^{-8}\ \Omega$m; l'equazione delle onde per $\mathbf{E}$ diventa

$$(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu\epsilon}{\rho\epsilon} \frac{\partial}{\partial t}) \mathbf{E} = 0$$

$\rho\epsilon = \tau =$ 'tempo di rilassamento' del conduttore, $\approx 10^{-19}$ s, quindi minore di $\frac{2\pi}{\omega}$ in tutte le condizioni realizzabili con oscillatori macroscopici. Localmente quindi il termine di spostamento è trascurabile rispetto a quello di conduzione. Ma scrivendo il rapporto tra i due

$$\omega\tau = \omega\epsilon_0\rho = \frac{2\pi c}{\lambda}\epsilon_0\rho = 2\pi \frac{\rho/\lambda}{Z_0}$$

ritroviamo la situazione descritta più sopra.

Richiamo sulle onde piane monocromatiche.

Per completezza, richiamo le espressioni dei campi e.m. per un'onda piana monocromatica che si propaga nel vuoto:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \quad ; \quad \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mathrm{Re}\ \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \tag{4.13}$$

dove $\mathbf{E}_0,\ \mathbf{B}_0$ sono due vettori con componenti complesse. Imponendo le quattro equazioni di Maxwell si trova che:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0 \quad , \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0 \quad , \quad \mathbf{k}\wedge\mathbf{E} = \omega\,\mathbf{B} \quad , \quad \mathbf{k}\wedge\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2}\omega\,\mathbf{E} \tag{4.14}$$

e da queste $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2} = \epsilon_0\mu_0,\ |\mathbf{E}| = c\,|\mathbf{B}|$.

Il vettore $\mathbf{E}_0$ contiene l'informazione sul'intensità e la polarizzazione dell'onda. Se aggiungiamo al versore $\hat{\mathbf{k}}$ due versori reali in modo che $(\hat\epsilon_1,\ \hat\epsilon_2,\ \hat{\mathbf{k}})$ formi una terna levogira possiamo scrivere $\mathbf{E}_0 = \hat\epsilon_1 E_1 + \hat\epsilon_2 E_2$; la polarizzazione è lineare se $E_1,\ E_2$ hanno la stessa fase, altrimenti ellittica. In alternativa posso usare $\hat\epsilon_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat\epsilon_1 \pm i\hat\epsilon_2)$ e scrivere $\mathbf{E}_0 = \hat\epsilon_+ E_+ + \hat\epsilon_- E_-$. Se $E_- = 0$ ho polarizzazione 'circolare levogira' o 'helicità positiva': il campo elettrico gira nel senso di un cavaturacciolo intorno alla direzione di propagazione.

La densità di energia mediata su un periodo è $\overline{\rho}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^* = \frac{1}{2}\epsilon_0(|E_1|^2+|E_2|^2) = \frac{1}{2}\epsilon_0(|E_+|^2+|E_-|^2)$, l'intensità dell'onda $I = c\overline{\rho}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2Z_0}|\mathbf{E}_0|^2$.

In teoria dei campi però l'onda piana viene quasi sempre descritta attraverso i potenziali elettromagnetici, e $\mathbf{A} = 2\mathrm{Re}\sum\hat\epsilon_i a_i e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$; siccome la condizione di Lorentz è invariante per trf. di gauge con $(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)\chi = 0$, possiamo porre $\phi = 0$, e la stessa forma vale sia nel gauge di Lorentz che in quello di Coulomb; in tutte le espressioni precedenti si sostituisce $\overline{|\mathbf{E}|^2} = \omega^2\overline{|\mathbf{A}|^2}$.

Il teorema di Poynting, il tensore degli sforzi.

Le espressioni per le densità di energia dei campi elettrico e magnetico nel vuoto $\rho_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2$, sono state ricavate per campi statici o stazionari; ci si puó ben chiedere se sono ancora valide nel caso non stazionario, e quindi applicabili alle onde e.m.. Il teorema che segue rende plausibile una risposta affermativa. Il teorema vale anche in presenza di materia, purché risponda linearmente, i.e. $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$; con i ferromagneti la magnetizzazione è un fenomeno dissipativo, che qui ignoro.

Usando le equazioni di Maxwell e la penultima identità troviamo:

$$\frac{\partial\rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} = \epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot\nabla\wedge\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot\nabla\wedge\mathbf{E} = -\nabla(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

Definendo il vettore di Poynting $\mathbf{\Pi} := \mathbf{E}\wedge\mathbf{H}$ possiamo riscrivere quello che abbiamo ricavato nella forma:

$$\frac{\partial\rho_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{\Pi} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{J} \tag{4.15}$$

che è la forma generale del teorema di Poynting. In analogia con il principio di conservazione della carica, il teorema viene interpretato osservando che se $\rho_{\mathcal{E}}$ è la densità di energia in $\mathrm{J/m^3}$ e $\mathbf{\Pi}$ la "densità di flusso di energia" in $\mathrm{W/m^2}$, integrando su un qualunque volume V troviamo che:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{pmatrix}\text{energia contenuta}\\ \text{in V}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{flusso di energia}\\ \text{uscente da V}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{energia dissipata in V}\\ \text{per effetto Joule}\end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Con questa interpretazione il teorema esprime la legge di conservazione dell'energia per il campo e.m., ed è difficile immaginare che esista una diversa espressione per l'energia che soddisfi a un'equazione analoga; ma naturalmente il test ultimo non può che venire dall'esperienza. Certo la conservazione dell'energia nei fenomeni elettromagnetici è ben verificata sperimentalmente, rafforzando la convinzione che l'espressione della densità di energie e.m. e l'interpretazione del vettore di Poynting siano corrette.

Nel caso di un'onda piana il vettore di Poynting punta in avanti e il suo modulo da' l'intensità dell'onda, i W/m^2 che essa trasporta. In altri casi il teorema è antintuitivo e da risposte bizzarre quanto alla localizzazione del flusso di energia: in un condensatore che si scarica l'energia sembra sfuggire dai bordi; applicato a un cilindro conduttore in regime stazionario, troviamo che il vettore di Poynting é diverso da zero e diretto verso l'interno sulla superficie laterale del cilindro. L'energia dissipata per effetto Joule appare quindi provenire dallo spazio circostante, e non dall'estremità da cui entra la corrente, come chiunque penserebbe.

E' possibile fare un ragionamento analogo, un po' più complicato, per la quantità di moto del campo elettromagnetico, adottando lo stesso punto di vista macroscopico di sopra. La forza di Lorentz sulla materia contenuta in un volume V è l'integrale di un vettore che posso manipolare come segue, usando le equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\wedge\mathbf{B}&=\epsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}+(\frac{1}{\mu_0}\nabla\wedge\mathbf{B}-\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t})\wedge\mathbf{B}=\\ &=\epsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{B}-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})+\epsilon_0(\nabla\wedge\mathbf{E})\wedge\mathbf{E}\end{aligned}$$

Ora a $\epsilon_0(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})=\frac{1}{c^2}\mathbf{\Pi}$ attribuisco il significato di 'densità di quantità di moto del campo e.m.'; scrivendo in componenti $\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, si ha per es.:

$$((\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}-\mathbf{E}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{E}))_i=E_i\partial_jE_j-E_j\partial_iE_j+E_j\partial_jE_i=\partial_j\big(E_iE_j-\tfrac{1}{2}\delta_{ij}E_kE_k\big)$$

Allora definisco il 'tensore degli sforzi' (di Maxwell)

$$\Pi_{ij}=\epsilon_0\big(E_iE_j-\tfrac{1}{2}\delta_{ij}E_kE_k\big)+\frac{1}{\mu_0}\big(B_iB_j-\tfrac{1}{2}\delta_{ij}B_kB_k\big) \tag{4.17}$$

e scrivo la 'seconda legge della meccanica' nella forma:

$$\left(\frac{d\mathbf{P}_{mec.}}{dt}\right)_i=\int_V(\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\wedge\mathbf{B})_id^3r=-\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{c^2}\Pi_id^3r+\int_V\partial_j\Pi_{ij}d^3r \tag{4.18}$$

oppure:

$$\left(\frac{d\mathbf{P}_{mec.}}{dt}+\frac{d\mathbf{P}_{e.m.}}{dt}\right)_i=\int_S \Pi_{ij}dS_j \tag{4.19}$$

Esempio 1. Per un'onda piana che si propaga nella direzione x, ed è linearmente polarizzata nella direzione y, gli elementi non diagonali di Π_{ij} sono nulli, quelli diagonali saranno $(\Pi_{xx},\Pi_{yy},\Pi_{zz})=(-\frac{\epsilon_0}{2}E_yE_y-\frac{1}{2\mu_0}B_zB_z,\frac{\epsilon_0}{2}E_yE_y-\frac{1}{2\mu_0}B_zB_z,-\frac{\epsilon_0}{2}E_yE_y+\frac{1}{2\mu_0}B_zB_z)$. Se l'onda viene assorbita completamente da una parete che va da $x=0$ a $x=\infty$, sulla parete ci sarà una pressione pari all'integrale della forza di volume, in media

$$P=\int_0^\infty(\partial_x\overline{\Pi}_{xx}-\frac{1}{c^2}\overline{\partial_t\Pi_x})dx=-\overline{\Pi}_{xx}\big|_{x=0}=\overline{\rho}_{\mathcal{E}}\big|_{x=0}$$

(la media su un periodo di $\partial_t\Pi_x$ è zero). Oppure possiamo pensare che una sezione S in un tempo dt assorbe una quantità di moto $\frac{1}{c^2}\overline{\Pi}_xS\,c\,dt=\frac{1}{c^2}\frac{k}{\mu_0\omega}\overline{E_y^2}S\,c\,dt=PSdt$, il risultato è lo stesso.

Esempio 2. In una cavità con pareti completamente assorbenti piena di radiazione (il modello tipico del corpo nero), $\overline{E_xE_y}=..=0$, $\overline{E_x^2}=\overline{E_y^2}=\overline{E_z^2}=\frac{1}{3}\overline{\mathbf{E}^2}$, con lo stesso ragionamento $\overline{\Pi_{xx}}=-\frac{\epsilon_0}{6}\overline{\mathbf{E}^2}-\frac{1}{6\mu_0}\overline{\mathbf{B}^2}$ e la pressione sulle pareti è $P=\frac{1}{3}\overline{\rho}_{\mathcal{E}}$.

Esempio 3. Dalle relazioni date sopra si ha che per un'onda piana $\overline{\rho}_{\mathcal{E}}=\epsilon_0\overline{\mathbf{E}^2}$, $\overline{\mathbf{\Pi}}=\frac{\mathbf{k}}{\mu_0\omega}\overline{\mathbf{E}^2}=\frac{\mathbf{k}}{\omega}c^2\overline{\rho}_{\mathcal{E}}=\hat{\mathbf{k}}\,c\,\rho_{\mathcal{E}}$; quindi per ogni volume $\overline{\mathbf{p}}_{em}=\frac{\mathbf{k}}{\omega}\overline{\mathcal{E}}_{em}=\hat{\mathbf{k}}\frac{\mathcal{E}_{em}}{c}$, che è la relazione tra quantità di moto ed energia di un fotone.

4.2 Cenni sulla magnetoidrodinamica.

Questo campo della fisica trova applicazione, tralaltro, nella studio delle macchie solari, delle atmosfere stellari, del magnetismo terrestre, alla fisica dei plasmi applicata alla fusione nucleare controllata. Poco praticata nei dipartimenti di fisica, molto di più in ingegneria. Qui, solo poco cenni, tanto per dare un'idea.

Consideriamo un fluido elettricamente neutro con resistività ρ in movimento con una velocità $\mathbf{v}$ che dipende dalla posizione; il campo elettrico da considerare per la legge di Ohm è quello nel riferimento in cui il fluido è in quiete, e quindi avremo:

$$\rho\mathbf{J}=\mathbf{E}+\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} \tag{4.20}$$

Sostituita nelle equazioni di Maxwell (trascurando il termine di spostamento, e usando $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ e quindi $\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{B})=-\nabla^2\mathbf{B}$) otteniamo:

$$\nabla\wedge\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}\quad,\quad -\nabla\wedge\mathbf{E}=\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\frac{\rho}{\mu_0}\nabla^2\mathbf{B}+\nabla\wedge(\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}) \tag{4.21}$$

Se in quest'ultima equazione domina il primo termine ('di diffusione', per es., se $\mathbf{v}\simeq 0$) stiamo riscoprendo le correnti parassite di Foucault, e vediamo che il campo magnetico si estingue con una costante di tempo dell'ordine di $\tau \sim \frac{\mu_0 L^2}{\rho}$, con L una dimensione tipica del sistema [10] . La situazione interessante si ha quando domina il secondo pezzo e possiamo ignorare il primo, che sarà grosso modo se $R_M \sim \frac{\tau}{v/L} \sim \frac{\mu_0\, v\, L}{\rho} >> 1$. Questo parametro R_M si chiama 'numero di Reynolds magnetico' e si vede che per es. con il mercurio che ha $\rho \simeq 9.4\ 10^{-8}\ \Omega m$ questa possibilità è difficile in laboratorio; si ritiene che invece $R_M >> 1$ sia verificata nel plasma cosmico, nelle atmosfere stellari etc., e su questa condizione sono basati tutte le spiegazioni dei campi magnetici 'naturali', e quindi i vari 'effetti dinamo'.

Nel caso $R_M >> 1$ è importante ricordare che, nella discussione della legge di Faraday, si dimostra (usando $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) che per la derivata del flusso di $\mathbf{B}$ attraverso una spira in movimento si ha:

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} - \oint_{\partial S} \mathbf{v}\wedge\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} \tag{4.22}$$

confrontando con la (4.21) si vede che il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso una superficie che si muove insieme al fluido è costante: il campo magnetico è intrappolato dalle linee di flusso del fluido. D'altra parte la forza di Lorentz contribuirà a determinare il moto del fluido. Per il moto del fluido abbiamo l'equazione di continuità e l'equazione di Eulero:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m \mathbf{v}) = 0\ , \\ \rho_m \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho_m\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mathbf{J}\wedge\mathbf{B} + \mathbf{F}_v = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{B} + \mathbf{F}_v = \\ &= -\nabla p - \nabla\Big(\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\Big) + \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{F}_v \end{aligned} \tag{4.23}$$

dove ρ_m è la densità di massa, p la pressione e $\mathbf{F}_v$ generiche 'altre forze' di volume (che ignoreremo). In componenti l'equazione di Eulero rivela il ruolo della parte magnetica del tensore di Maxwell:

$$\rho_m \frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_i p + \partial_j \frac{1}{\mu_0}(B_i B_j - \tfrac{1}{2}\delta_{ij} B_k B_k) + F_{v\,i}$$

Si vede che c'è una pressione aggiuntiva pari a $\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$, che rende possibile il confinamento di un plasma. La situazione si capisce forse meglio considerando l'esempio di un fluido in moto stazionario ($\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = 0$) in un cilindro con l'asse lungo $\hat{\mathbf{k}}$. Se $p = p(r_\perp)$, $\mathbf{B} = \frac{B(r_\perp)}{r_\perp}(-\hat{\mathbf{i}}y + \hat{\mathbf{j}}x)$, facendo il calcolo esplicitamente trovo:

$$0 = -p' - \frac{1}{\mu_0} B\, B' - \frac{1}{\mu_0\, r_\perp} B^2$$

[10] l'equazione di diffusione $\frac{\partial g(t,\mathbf{x})}{\partial t} = D\nabla^2 g(t,\mathbf{x})$, con la condizione iniziale $g(0,\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x})$ ha la soluzione $g(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4Dt}}$; una cosa inizialmente nell'origine dopo un tempo t avrà uno spostamento trasversale $< x^2 >= \int x^2 g(t,\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 2Dt$ (legge di Einstein per il moto browniano).

Siccome $B' > 0$, deve essere $p' < 0$, cfr. per es. i grafici nel §10.5 di [2]. I moti stazionari sono però affetti da numerose instabilità (cfr. per es. [2] §10.6) che affliggono le macchine TOKAMAK per la fusione nucleare controllata (per es. JET a Culham, Inghilterra e ITER che partirà a Cadarache, in Provenza; cfr. www.jet.efda.org).

Un'altra conseguenza notevole delle (4.21)(4.23) è la possibilità di onde magnetoidrodinamiche. Consideriamo prima il caso delle onde sonore per $\mathbf{B} = 0$. Rispetto a una soluzione statica $\rho_0,\ p_0,\ \mathbf{v} = 0$, l'onda sonora è una piccola perturbazione, che possiamo trattare ponendo

$$\rho_m = \rho_0 + \epsilon\rho_1(\mathbf{x}, t)\ ,\ \mathbf{v} = \epsilon\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)\ ,\ p = p_0 + \epsilon\Big(\frac{\partial p}{\partial \rho_m}\Big)\rho_1(\mathbf{x}, t) \tag{4.24}$$

sostituendo nelle equazioni del moto e trascurando i termini con ϵ^2. All'ordine ϵ:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0\ ,\ \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\Big(\frac{\partial p}{\partial \rho_m}\Big)\nabla\rho_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \Big(\frac{\partial p}{\partial \rho_m}\Big)\nabla^2\rho_1 = 0$$

troviamo così l'equazione delle onde sonore. La derivata $\frac{\partial p}{\partial \rho_m}$, che è il quadrato della velocità di propagazione, va fatta a entropia costante, supponendo cioè che compressioni e decompressioni avvengano adiabaticamente; per un gas perfetto questo implica pV^γ=cost. con $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, quindi $p = k\rho_m^\gamma$ e $\frac{\partial p}{\partial \rho_m}\Big|_S = \gamma\frac{p}{\rho_m}$. Per l'aria a $T = 288.$ K, $p = 1.013\ 10^5$ N/m^2, $\rho_m = 1.225$ kg/m^3 ('atmosfera standard'), $\gamma = 1.4$, abbiamo una velocità del suono $v_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho_m}\big|_S} = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho_m}} = 340$ m/s.

Le equazioni sono più complicate se aggiungiamo il campo magnetico, supponendo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \epsilon\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ (e trascurando il termine di diffusione nella (4.21)):

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -v_s^2\,\nabla\rho_1 - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}_0 \wedge (\nabla \wedge \mathbf{b}) \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B}_0) \tag{4.25}$$

derivando la prima rispetto al tempo, usando l'eq. di continuità e introducendo la 'velocità di Alfven' $\mathbf{v}_A = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}\mathbf{B}_0$, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = v_s^2\,\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}_1) - \mathbf{v}_A \wedge (\nabla \wedge (\nabla \wedge (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_a)) \tag{4.26}$$

che ha soluzioni di tipo onda; sostituendoci $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{kx}-\omega t)}$ abbiamo:

$$\omega^2\mathbf{v}_0 = (v_s^2 + v_A^2)(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0)\mathbf{k} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_A)\Big((\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{k})\mathbf{v}_0 - (\mathbf{v}_A\cdot\mathbf{v}_0)\mathbf{k} - (\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{k})\mathbf{v}_A\Big) \tag{4.27}$$

Moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{k}$ si vede che

$$\omega^2\mathbf{k}\wedge\mathbf{v}_0 = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_A)^2\mathbf{k}\wedge\mathbf{v}_0 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_A)(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}\wedge\mathbf{v}_A\ .$$

Abbiamo onde longitudinali ($\mathbf{k} \wedge \mathbf{v}_0 = 0$) se $\mathbf{k}$ è parallelo o perpendicolare a $\mathbf{v}_A$; con un po' di algebra si trova che $\frac{\omega}{k} = v_s$ o $\frac{\omega}{k} = \sqrt{v_s^2 + v_a^2}$ rispettivamente (le normali onde sonore sono un caso particolare). Se $\mathbf{k}$ è parallelo a $\mathbf{v}_A$ abbiamo però anche onde trasversali ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 = 0$) (ipotizzate dall'astrofisico Hannes Alfvèn, premio Nobel 1970, nel '42) con $\frac{\omega}{k} = v_A$, puramente magnetiche; ho trovato che ci sono molte informazioni (e referenze) su queste onde in Wikipedia.

4.3 Onde e.m. in presenza di superfici metalliche, effetto pelle.

Il campo elettrico di un'onda piana monocromatica che si propaga nella direzione x e incide a $x = 0$ sulla superficie di un conduttore con $\rho\epsilon << 1/\omega$ (quindi, tale che il tempo di rilassamento del conduttore sia $<<$ del periodo di oscillazione dell'onda; abbiamo visto che questa è la condizione per poter trascurare la corrente di spostamento) soddisfa $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\rho\mathbf{J} = \mathbf{E}$, e

$$\nabla^2\mathbf{E} = -(\frac{\omega^2}{v^2} + i\frac{\omega\mu}{\rho})\mathbf{E} \simeq -i\frac{\omega^2}{v^2}\frac{1}{\omega\epsilon\rho}\mathbf{E} = -(\frac{(1+i)}{\delta})^2\mathbf{E} \ \to \ \mathbf{E} \simeq \mathrm{Re}\big(\ \mathbf{E}_0 e^{i(\frac{1+i}{\delta}z - \omega t)}\big)$$
$$\text{con} \ \ \delta = v\sqrt{\frac{2\rho\epsilon}{\omega}} = \sqrt{\frac{\rho}{\pi\nu\mu}} = \text{‘skin depth'}; \qquad \mathbf{B} = \frac{1}{i\omega}\nabla \wedge \mathbf{E} \simeq \frac{1+i}{\omega\delta}\hat{\mathbf{i}} \wedge \mathbf{E} \tag{4.28}$$

(nella prima riga ho usato $\frac{\omega^2}{v^2} << \frac{\omega\mu}{\rho}$). L'onda penetra nel metallo per una profondità dell'ordine della ‘skin depth', che misura lo smorzamento del campo nel conduttore; per il rame $\rho \simeq 1.67\ 10^{-8}\,\Omega\mathrm{m}$, $\delta \simeq \frac{6.6}{\sqrt{\nu}}\,10^{-2}\,\mathrm{m}$.

(Uso, come tutti, una notazione imprecisa, indicando con $\mathbf{E}$ sia il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, che il vettore complesso $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re}\ \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$).

Ma anche la corrente elettrica in un conduttore tende a circolare solo vicino alla supeficie, fino a una profondità dell'ordine della skin depth. Per vederlo consideriamo il caso più semplice: il conduttore è una lastra indefinita, delimitata dai piani $z = \pm\frac{1}{2}a$, la densità di corrente è $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{Re}\ j(z)\,e^{i\omega t} = \mathbf{E}/\rho$. La corrente genera un campo magnetico $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{j}}\,\mathrm{Re}\ B(z)\,e^{i\omega t}$. Dalle equazioni di Maxwell, con la stessa approssimazione di prima:

$$\rho\partial_z j = -i\omega B \ , \ -\partial_z B = \mu j \quad \to \quad \frac{d^2 j}{dz^2} = \frac{i\omega\mu}{\rho}j = (\frac{1+i}{\delta})^2 j \quad \to$$
$$\to \quad \mathbf{J} = \hat{\mathbf{i}}A\Big(\cos(\frac{z}{\delta} + \omega t)e^{z/\delta} + \cos(\frac{z}{\delta} - \omega t)e^{-z/\delta}\Big) \ ,$$

dove ho imposto $j(a/2) = j(-a/2)$. Il caso di un filo circolare è più complicato (per via delle funzioni di Bessel), ma il risultato è simile. All'interno del filo la corrente è trascurabile; questo è il motivo per cui i fili per alta frequenza sono spesso argentati.

Guide d'onda, cavità risonanti, cavi coassiali.

Consideriamo il caso in cui un'onda e.m. viaggia all'interno di una ‘guida d'onda' metallica, di sezione costante, supponendo in prima approssimazione per la resitività $\rho = 0$.

La guida sia di lunghezza indefinita; se invece è terminata da due superfici metalliche perpendicolari all'asse z parliamo di 'cavità risonanti'; il discorso non cambia molto. Le guide d'onda sono importanti in tutta la tecnologia delle microonde (radar, forni[11], comunicazioni); le cavità risonanti negli acceleratori di particelle; i cavi coassiali in tutta l'elettronica.

Qualunque siano le cariche e le correnti superficiali indotte sulla superficie metallica S, con normale $\hat{\mathbf{n}}$, dobbiamo avere che $\mathbf{E}$ è nullo nel conduttore, e siccome $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, anche $\mathbf{B}$; ma $\mathbf{E}_{\parallel}$ e $\mathbf{B}_{\perp}$ sono continui, e abbiamo le condizioni al contorno:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}\big|_S = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}\big|_S = 0 \tag{4.29}$$

Separiamo la coordinata z dalle altre, prima ponendo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_{\perp} \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_z + \mathbf{B}_{\perp} \quad , \quad \nabla = \nabla_z + \nabla_{\perp} \tag{4.30}$$

dove $\mathbf{E}_z = \hat{\mathbf{k}}\, E_z,\ \mathbf{B}_z = \hat{\mathbf{k}}\, B_z,\ \nabla_z = \hat{\mathbf{k}}\, \partial_z$. Le equazioni di Maxwell diventano (ponendo $\epsilon\mu = \frac{1}{v^2}$, e sottintendendo ovunque un fattore $e^{-i\omega t}$):

$$\begin{gathered}\nabla \wedge \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad \rightarrow \quad \nabla_{\perp} \wedge \mathbf{E}_{\perp} = i\omega \mathbf{B}_z \ , \quad \nabla_z \wedge \mathbf{E}_{\perp} + \nabla_{\perp} \wedge \mathbf{E}_z = i\omega \mathbf{B}_{\perp} \\ \nabla \wedge \mathbf{B} = -i\frac{\omega}{v^2}\mathbf{E} \quad \rightarrow \quad \nabla_{\perp} \wedge \mathbf{B}_{\perp} = -i\frac{\omega}{v^2}\mathbf{E}_z \ , \quad \nabla_z \wedge \mathbf{B}_{\perp} + \nabla_{\perp} \wedge \mathbf{B}_z = -i\frac{\omega}{v^2}\mathbf{E}_{\perp} \\ \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} + \partial_z E_z = 0 \ , \ \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp} + \partial_z B_z = 0\end{gathered} \tag{4.31}$$

Per tutte le componenti ritroviamo, con il solito gioco, l'equazione del second'ordine $(\nabla_{\perp}^2 + \partial_z^2 + \frac{\omega^2}{v^2})E_z = ... = (\nabla_{\perp}^2 + \partial_z^2 + \frac{\omega^2}{v^2})\mathbf{B}_{\perp} = 0$. Separando le variabili possiamo supporre una dipendenza da z del tipo $e^{ik_z z}$ e porre $\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2$, e quindi avremo

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2)E_z = (\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2)\mathbf{E}_{\perp} = (\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2)B_z = (\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2)\mathbf{B}_{\perp} = 0 \tag{4.32}$$

equazioni bidimensionali. Posto che fondamentalmente non vorremmo avere affatto le componenti longitudinali $E_z,\ B_z$, si trova che tutte le soluzioni possssono essere espresse come sovrapposizioni di tre tipi ('modi') base:

Modi TEM: $E_z = 0\ ,\ B_z = 0$.

Con la prima e l'ultima delle (4.31) si trova che in questo caso

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = i\omega B_z = 0 \quad , \quad \partial_x E_x + \partial_y E_y = -\partial_z E_z = 0\ , \tag{4.33}$$

quindi possiamo porre $E_x = -\partial_x V,\ E_y = -\partial_y V$, e $(\partial_x^2 + \partial_y^2)V = 0$, i.e. V è una funzione <u>armonica</u> $V(x,y)$, che deve essere costante sulla superficie metallica altrimenti sarebbe

[11] raccomando la voce 'microwave oven' di wikipedia

$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}\big|_S \neq 0$. Perciò, se la sezione della guida è semplicemente connessa (tonda, quadrata, etc.), la funzione armonica è costante, e il modo TEM semplicemente non esiste. Esiste invece, ed è dominante, in un cavo coassiale, come vedremo in dettaglio alla fine di questo paragrafo.

Se non possiamo avere modi TEM, possiamo avere $E_z = 0$ (modi TE, transverse-electric), oppure $B_z = 0$ (modi TM, transverse-magnetic). Con le (4.31)(4.32) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\textbf{modi TE}: \quad E_z = 0\ , \quad \mathbf{E}_\perp = i\frac{\omega}{k_\perp^2}\nabla_\perp \wedge \mathbf{B}_z \quad , \quad \mathbf{B}_\perp = \frac{1}{k_\perp^2}\nabla_\perp \partial_z B_z \\ &\textbf{modi TM}: \quad B_z = 0\ , \quad \mathbf{B}_\perp = -i\frac{\omega}{v^2 k_\perp^2}\nabla_\perp \wedge \mathbf{E}_z \quad , \quad \mathbf{E}_\perp = \frac{1}{k_\perp^2}\nabla_\perp \partial_z E_z \end{aligned} \tag{4.34}$$

Si vede che per i modi TE tutto è esprimibile in termini di B_z, per i modi TM in termini di E_z, soluzioni della (4.32). Se $E_z = 0$, dalle (4.29)(4.34) in prossimità della parete avremo

$$0 = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_\perp = i\frac{\omega}{k_\perp^2}\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla_\perp \wedge \mathbf{B}_z) = -i\frac{\omega}{k_\perp^2}\hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_\perp)B_z$$

quindi, nei modi TE, B_z deve soddisfare la (4.32) con una condizione al contorno di tipo Neumann. Se invece $B_z = 0$, allora E_z deve soddisfare la(4.32) con la condizione al contorno che $E_z\big|_S = 0$, quindi di tipo Dirichlet. Gli autovalori $k_\perp^2$ di $-\nabla_\perp^2$ saranno in generale diversi (uguali per una guida a sezione rettangolare). Siccome $k_z^2 \geq 0 \to \omega^2 \geq v^2 k_\perp^2$, c'è una frequenza minima per ogni modo trasmesso, la 'frequenza di taglio'.

Per avere un'idea, in una guida a sezione rettangolare di lati a, b, nel modo TE, $B_z = B_{z0}\cos\frac{\pi x m}{a}\cos\frac{\pi y n}{b}e^{ik_z z}$ (i coseni diventano seni nei modi TM); $\nu > \sqrt{\frac{v^2}{4}(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})} =: \frac{\omega_{mn}}{2\pi}$; se $v = c, m = n = 1,\ a = b = 5\,\text{cm}$, si avrà una frequenza di taglio $\nu_c \simeq 4.2\,\text{GHz}$ (nei forni a microonde $\nu \simeq 2.45\,\text{GHz}$). E' importante notare che la velocità di fase $\frac{\omega}{k_z}$ diventa infinita quando $\nu \to \nu_c$, ma non la velocità di gruppo $v_g = (\frac{dk_z}{d\omega})^{-1} = v^2 k_z/\omega = v\sqrt{1 - k_\perp^2/k^2}$, che anzi va a zero.

Nel §9.5.2 di [3] si suggerisce un modo più intuitivo di visualizzare un'onda TE in una guida rettangolare: un'onda piana con $\mathbf{k}' = \hat{\mathbf{i}}\frac{\pi m}{a} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\pi n}{b} + \hat{\mathbf{k}}\,k_z,\ \omega = v|\mathbf{k}'| = \sqrt{k_z^2 + (\frac{\pi m}{a})^2 + (\frac{\pi n}{b})^2}$; la direzione di $\mathbf{k}'$ è inclinata rispetto all'asse z di un angolo θ, con $\cos\theta = \frac{k_z}{|\mathbf{k}'|} = \sqrt{1 - (\frac{\omega_{mn}}{\omega})^2}$, e se fosse $\omega = \omega_{mn}$ il fronte dell'onda sarebbe parallelo alle pareti; ma le componenti x e y sono onde stazionarie, e quindi non si propagherebbe niente. La velocità di gruppo dell'onda è $v_g = v^2 k_z/\omega = v\cos\theta$.

La potenza dissipata nelle pareti può essere stimata supponendo che anche per $\rho \neq 0$ il campo $\mathbf{B}$ sia quasi parallelo e il campo $\mathbf{E}$ quasi perpendicolare alla superficie. La componente $\mathbf{E}_\parallel$ può essere stimata dalla (4.28)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel = \frac{1+i}{\omega\delta}\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel) \ \to\ \mathbf{B}_\parallel = \frac{1+i}{\omega\delta}\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_\parallel \ \to\ \mathbf{E}_\parallel = \frac{\omega\delta}{1+i}\mathbf{B}_\parallel \wedge \hat{\mathbf{n}} \tag{4.35}$$

La componente del vettore di Poynting medio sarà

$$\overline{\Pi}_n = \frac{1}{2\mu} \mathrm{Re}\, \mathbf{E}_\parallel \wedge \mathbf{B}^*_\parallel = \frac{\omega\delta}{4\mu} |\mathbf{B}_\parallel|^2 \tag{4.36}$$

La sua circuitazione può essere rapportato al flusso di potenza nella sezione della guida per ottenere una costante di attenuazione (per guide di rame per microonde si hanno lunghezze di attenuazione di 200-400 m). Per una cavità risonante si definisce invece un fattore di merito

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{energia dissipata per ciclo}} = \omega \frac{\text{energia immagazzinata}}{\text{potenza dissipata}}$$

e avrò $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\omega}{Q}\mathcal{E}$, quindi $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\omega t/Q}$, e:

$$E(t) \simeq E_0 e^{-\omega t/2Q - i\omega t} = \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{E_0\, e^{-i\omega' t}}{\omega' - \omega + i\frac{\omega}{2Q}} \qquad \text{(per t > 0)}$$

i.e. una 'larghezza di risonanza' per la cavità $\Gamma = \frac{\omega}{Q}$. Le cavità risonanti che riforniranno di energia il fascio interno a LHC avranno $\nu \simeq 500\,\mathrm{MHz}$, $\frac{\Gamma}{2\pi} \simeq 10\,\mathrm{kHz}$, quindi, se ho capito bene, Q=50000; l'ampiezza del campo elettrico sarà di 5 MV/m.

Esercizio 1. Il cavo coassiale.

Studiamo la propagazione del campo elettromagnetico nell'intercapedine tra due cilindri conduttori di raggi $a < b$, di nuovo prendendo la resistività $\rho = 0$ in prima approssimazione. Il modo TEM è dominante: dalla (4.33), $\mathbf{E}_\perp = -\nabla_\perp V$, e $k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$, con $\nabla^2_\perp V = 0$, quindi $V = A \log\sqrt{x^2+y^2}\, e^{i(kz-\omega t)}$, e

$$\mathbf{E} = -A\, \frac{\hat{\mathbf{i}}\, x + \hat{\mathbf{j}}\, y}{x^2+y^2}\, e^{i(kz-\omega t)} \;, \quad \mathbf{B} = -\frac{A}{v}\, \frac{-\hat{\mathbf{i}}\, y + \hat{\mathbf{j}}\, x}{x^2+y^2}\, e^{i(kz-\omega t)}$$

La circuitazione di $\mathbf{B}$ da la corrente nel conduttore centrale, $2\pi\frac{A}{v} e^{i(kz-\omega t)} = \mu I$, e ponendo $I = I_0 e^{i(kz-\omega t)}$, $A = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{I_0}{2\pi}$. Avremo $V(b) - V(a) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{I}{2\pi} \log\frac{b}{a} = ZI$, dove $Z \simeq 60 \log\frac{b}{a}\ \Omega$ è l'<u>impedenza caratteristica</u> del cavo; ha le dimensioni di una resistenza, ma assolutamente nulla a che fare con la dissipazione.

Il vettore di Poynting mediato su un periodo $\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|I_0|^2}{4\pi^2(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{k}}$; integrato sulla sezione

$$\text{Potenza trasmessa } = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|I_0|^2}{2\pi} \log\frac{b}{a} = Z\tfrac{1}{2}|I_0|^2$$

Usando la (4.35), per stimare il campo elettrico longitudinale dovuto a $\rho \neq 0$, trovo un $\Pi_n = \frac{\omega\delta}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|I_0|^2}{4\pi^2 v r^2}$ per $r = a,\, b$; il rapporto tra la sua circuitazione e la potenza trasmessa da'

$$\gamma = \frac{\omega\delta}{2v}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \frac{1}{\log\frac{b}{a}}$$

(su [2] c'è un fattore diverso da 1/2). In [1] e in tutti i libri di elettronica il cavo è discusso in termini della corrente e della differenza di potenziale tra i conduttori, e capacità e induttanza per unità di lunghezza:

$$dV = L_z dz \frac{dI}{dt} \ ; \quad dI = C_z dz \frac{dV}{dt} \ , \quad \text{con: } L_z = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{b}{a} \ , \ C_z = \frac{2\pi\epsilon}{\log \frac{b}{a}}$$

quindi $\frac{d^2V}{dz^2} = L_z C_z \frac{d^2V}{dt^2}$, e ritroviamo che $V = ZI = ZI_0 e^{i(kz-\omega t)}$, con $Z = \sqrt{\frac{L_z}{C_z}}$, $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L_z C_z}}$; però non saprei calcolare γ, che dipende crucialmente dall'effetto pelle, cioè dal fatto che la corrente circola solo in un sottile strato dei conduttori.

Per esempio (da [1]): se $\frac{b}{a} = 3.5$, $\epsilon_r = 2.25$, $Z = 50\,\Omega$, $v = 2\,10^8$m/s ; se $a = 10^{-3}$ m e i conduttori sono di rame, avrei $\gamma \simeq \sqrt{\nu}\,10^{-6}\,m^{-1}$, e una lunghezza di attenuazione $\Lambda = \frac{1}{\gamma} \simeq \frac{10^6}{\sqrt{\nu}}$m, 31.6 m a 1 GHz, (stima ottimistica?). Gli elettronici esprimono tutto in decibel $=10\log_{10}\frac{P}{P_0}$ (perché sono o erano abituati a graficare tutto su carta log-log o semilog), e direbbero che ho una perdita di 1 db di potenza ogni $\frac{2.3}{10} \times 31.6 = 7.3$m.

Esercizio 2. (da [5]): una cavità risonante formata da un parallelepipedo di lati (a, a, L) viene eccitata in modo che al suo interno $B_z = E_x = E_y = 0$, $E_z = E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} e^{-i\omega t}$. Quanto vale ω? quale è il suo Q?

Il modo eccitato è TM, e $k_z = 0$, quindi $\omega = ck = c\sqrt{(\frac{\pi}{a})^2 + (\frac{\pi}{a})^2} = \sqrt{2}\,c\,\frac{\pi}{a} = 2\pi\nu$, e $\mathbf{B} = i\frac{\omega}{c^2k^2}\nabla \wedge \mathbf{E}_z = i\,\frac{\pi}{\omega a}\,E_0\,(\hat{\mathbf{i}}\,\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{a} - \hat{\mathbf{j}}\,\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a})$. L'energia immagazzinata è $\mathcal{E} = \frac{1}{4}\int dx\,dy\,dz(\epsilon_0|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{B}|^2)$, e siccome $\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}dx = \int_0^a \cos^2\frac{\pi x}{a}dx = \frac{a}{2}$, si calcola facilmente; mi viene che i contributi elettrici e magnetici sono uguali e $\mathcal{E} = \frac{1}{8}\epsilon_0|E_0|^2 a^2 L$.

Per calcolare il Q ci serve il flusso di energia che va nelle pareti per ogni ciclo, che è $\frac{2\pi}{\omega}$ volte il flusso di Π_n, eq.(4.36). Sulla parete $x = 0$ trovo un flusso $\frac{\omega\delta}{4\mu_0}(\frac{\pi}{\omega a})^2|E_0|^2 L\frac{a}{2}$, e lo stesso sulle altre tre pareti di area aL, quindi in tutto (credo) $\frac{\pi\delta Lc}{2\sqrt{2}}\epsilon_0|E_0|^2$; sulle pareti $z = 0$ e $z = L$ trovo (due volte) $\frac{\omega\delta}{4\mu_0}(\frac{\pi}{\omega a})^2|E_0|^2\frac{a^2}{2} = \frac{\pi\delta ac}{8\sqrt{2}}\epsilon_0|E_0|^2$. Mettendo tutto assieme:

$$Q = \frac{\frac{1}{8}\epsilon_0|E_0|^2 a^2 L}{\epsilon_0|E_0|^2(\frac{\pi\delta ac}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi\delta Lc}{2\sqrt{2}})\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{aL}{\pi\delta(2a + 4L)}$$

(mi piacerebbe poter controllare questo calcolo). Per una scatola di rame $5 \times 5 \times 10$ cm, trovo $\nu = 4.24\,$GHz, con $Q = 3.1\,10^3$.

La formula che abbiamo ottenuto per la frequenza, $\nu = \frac{c}{\sqrt{2}\,a}$, diventa $\nu = \frac{2.405\,c}{R}$ per una cavità cilindrica, 2.405 essendo il primo zero di $J_0(kr)$; una cavità che funziona a $\nu = 500\,$MHz (come quelle di LHC) dovrebbe aver $R = 1.44\,$m.

Esercizio 3. In generale, quali e quanti sono i modi possibili per il campo elettromagnetico all'interno di una cavità, in un intervallo di frequenza?

Consideriamo una cavità di lati (L_1, L_2, L_3), quindi volume $V = L_1 L_2 L_3$, vuota e con pareti perfettamente conducenti, e continuiamo a distinguere la componente z dalle altre. Nei modi TE B_z deve soddisfare una condizione al contorno di tipo Neumann anche a $z = 0, L_3$, e quindi avremo $B_z = B_{z0} \cos \frac{\pi x n_1}{L_1} \cos \frac{\pi y n_2}{L_2} \cos \frac{\pi z n_3}{L_3} e^{-i\omega t}$, con $\frac{\omega^2}{c^2} = (\frac{\pi n_1}{L_1})^2 + (\frac{\pi n_2}{L_2})^2 + (\frac{\pi n_3}{L_3})^2 = \mathbf{k}^2$. Nei modi TM E_z deve soddisfare una condizione di tipo Dirichlet, quindi i coseni diventano seni, ma i valori di $\mathbf{k}$ permessi sono gli stessi. Quello che si dice comunemente è per ogni valore di $\mathbf{k}$ ci sono due 'polarizzazioni' possibili.

Se nello spazio $\mathbf{k}$ segnamo un punto per ogni valore permesso, in un parallelepipedo di lati $(\frac{\pi N_1}{L_1}, \frac{\pi N_2}{L_2}, \frac{\pi N_3}{L_3})$ ci saranno $N_1 N_2 N_3$ punti; la densità di punti sarà quindi $\frac{V}{\pi^3}$. Per sapere quanti punti ci sono in un intervallo Δk, consideriamo l'ottante positivo[12] di una shell sferica compresa tra k e $k + \Delta k$, che avrà volume $\frac{4\pi k^2 \Delta k}{8}$, e quindi conterrà $\frac{4\pi k^2 \Delta k}{8} \frac{V}{\pi^3}$ valori di $\mathbf{k}$ permessi. Come abbiamo visto, ad ogni punto corrispondono due modi permessi, e $k = \frac{2\pi\nu}{c}$, quindi in un intervallo di frequenza $\Delta\nu$ troviamo che ci sono $\frac{8\pi V \nu^2 \Delta\nu}{c^3}$ modi elettromagnetici. Questa espressione è cruciale nella derivazione della distribuzione di energia del corpo nero. Però non so dimostrare che la formula vale (asintoticamente) anche per una scatola di forma qualsiasi, come è sicuramente.

4.4 Emissione di onde elettromagnetiche. La formula di Kirchoff.

La formula di Kirchoff esprime la soluzione dell'equazione di D'Alembert non omogenea, che indichiamo con:

$$(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}) f(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) \tag{4.37}$$

in un punto P di coordinate $\mathbf{x}$ all'interno di un volume V, in termini del valore di f sul bordo S di V e della sorgente ϕ all'interno di V. Consideriamo il caso di f, ϕ sinusoidali (in generale saranno una serie o un integrale di Fourier), con $k = \frac{\omega}{v}$:

$$f(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad , \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \quad \rightarrow \quad (\nabla^2 + k^2) F(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \tag{4.38}$$

A quest'ultima equazione, che si chiama equazione di Helmholtz, possiamo applicare la stessa strategia usata per ottenere la (2.2), usando la (1.13). Integriamo su V la seconda formula di Green espressa per coordinate $\mathbf{x}'$, prendendo $\phi(\mathbf{x}') = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$, $\psi(\mathbf{x}') = F(\mathbf{x}')$, e integrando in d^3x':

$$\int_V (F(\mathbf{x}')(\nabla'^2 + k^2)\frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}(\nabla'^2 + k^2) F(\mathbf{x}')) d^3r' =$$

$$-4\pi F(\mathbf{x}) - \int_V \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Phi(\mathbf{x}') d^3r' = \int_S (F(\mathbf{x}')\nabla' \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\nabla' F(\mathbf{x}')) \cdot d\mathbf{S}'$$

---

[12] perché (n_1, n_2, n_3) sono positivi

$$F(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi}\int_V \frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Phi(\mathbf{x}')d^3r' + \frac{1}{4\pi}\int_S (\frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\nabla' F(\mathbf{x}') - F(\mathbf{x}')\nabla'\frac{e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}) \cdot d\mathbf{S}' \tag{4.39}$$

che è una prima forma della formula di Kirchoff. Una dimostrazione (in parte) alternativa, per chi avesse dei dubbi sull'uso della teoria delle distribuzioni, può essere ottenuta con la logica seguita per derivare la (2.2).,

Il significato del segno dell'esponente in $e^{\pm ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$, e la sua scelta, si capisce ripristinando la dipendenza dal tempo, moltiplicando per $e^{-i\omega t}$ (per poi integrare o sommare su ω). Scegliendo il segno + si trova che:

$$\Phi(\mathbf{x}')e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-i\omega t} = \phi(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{v})) \quad , \; \nabla' F(\mathbf{x}')e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-i\omega t} = \nabla' f\Big|_{\mathbf{x}', t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{v}}$$
$$ikF(\mathbf{x}')e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-i\omega t} = \frac{i\omega}{v}F(\mathbf{x}')e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-i\omega t} = -\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}', t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{v}}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, t) = \frac{-1}{4\pi}\int_V \frac{\phi(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{v})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3r' + \\ + \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big(\nabla' f - \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}f\Big)\Big|_{t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{v}} \cdot dS' \end{aligned} \tag{4.40}$$

che è una seconda forma della formula di Kirchoff. Quello che si nota subito è che le funzioni che vi compaiono sono 'ritardate', calcolate cioè non a t ma al tempo anteriore $t - \frac{r}{v}$; la formula rivela esplicitamente che occorre un tempo $\frac{r}{v}$ perchè un 'effetto' possa manifestarsi a distanza r dalla 'causa'. Se avessi scelto e^{-ikR} avrei ottenuto, al contrario, il presente in funzione del futuro, che non è quello che vogliamo.

Le applicazioni della formula che considero corrispondono ai due casi limite in cui contribuiscono solo l'integrale di superficie o quello di volume.

La teoria scalare della diffrazione [2].

Questo è un tentativo di dare una base matematica al principio di Huygens-Fresnel come viene usato nella teoria classica dell'interfernza e della diffrazione.

Supponiamo che lo spazio sia diviso in due da uno schermo in cui sono praticate delle fenditure S_1, che le sorgenti stiano tutte a sinistra dello schermo e che ci interessi quello che succede a destra, per una data onda incidente. Prendiamo per S lo schermo chiuso da una semisfera arbitrariamente grande, e supponiamo che il campo F vada a zero abbastanza rapidamente da poter trascurare nella (4.40) il contributo all'integrale della semisfera. Si ottiene allora, orientando lo schermo S_1 verso l'interno della regione di interesse:

$$F(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\Big(\nabla' F + (ik - \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|})\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}F\Big) \cdot d\mathbf{S}' \tag{4.41}$$

Nell'approssimazione proposta da Kirchoff adesso si suppone:

(i) che F e le sue derivate siano zero ovunque sullo schermo tranne che nella fenditura.

(ii) che i valori di F e delle sue derivate sulla fenditura siano uguali a quelli dell'onda incidente in assenza di schermo.

Disgrazia vuole però che le ipotesi/approssimazioni suggerite da Kirchoff siano inconsistenti (per es., per la (i), una soluzione dell'equazione di Helmholtz $(\nabla^2 + k^2)F = 0$ zero insieme alle sue derivate su una superficie finita è zero ovunque; dalle soluzioni esatte o numeriche del problema si trova che la (ii) è totalmente improbabile). Per uno schermo piano, una modifica proposta da Rayleigh consiste nel prendere, invece di $\frac{e^{ikR}}{R}$, una funzione di Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ che si annulli per $\mathbf{x}'$ sullo schermo (che si ottiene subito con il metodo delle immagini). L'effetto netto è di eliminare dalla (4.41) il pezzo con $\nabla' F$ e raddoppiare il secondo; trascurando in questo il termine con $\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}$ si ottiene la teoria classica della diffrazione (con un 'fattore di obliquità' $\cos\theta$), che come è noto funziona benissimo nella maggior parte dei casi. Tralascio le modifiche rese necessarie dal carattere vettoriale della radiazione elettromagnetica.

I 'potenziali ritardati' [2].

Consideriamo le equazioni (4.5) per i potenziali elettromagnetici nel gauge di Lorentz, e applichiamo la (4.40) mandando all'infinito la supeficie S, supponendo che ϕ, A_x, A_y, A_z, i loro gradienti e le loro derivate rispetto al tempo vadano a zero all'infinito abbastanza rapidamente da rendere nullo il contributo dell'integrale di superficie. Otteniamo allora le classiche formule dei potenziali ritardati:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3r' \qquad ; \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3r' \tag{4.42}$$

Queste formule da sole sintetizzano un bel po' di elettrodinamica. Però la loro elegante semplicità si perde un po' per strada quando dai potenzali passiamo ai campi $\mathbf{E}, \mathbf{B}$; per esempio:

$$\partial_x \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})(x - x')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3r' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\partial_t \rho(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})(x - x')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} d^3r'$$

Vediamo che se le sorgenti sono indipendenti dal tempo, il secondo termine è nullo e ritroviamo l'espressione del campo coulombiano, che decresce all'infinito come $\frac{1}{r^2}$. Per sorgenti dipendenti dal tempo invece, nel secondo termine troviamo le onde elettromagnetiche, con campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ che decrescono all'infinito come $\frac{1}{r}$. In particolare, per il campo magnetico (il calcolo del campo eletrico è più complicato), troviamo:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left(\frac{\mathbf{J}| \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial_t \mathbf{J}| \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right) d^3r' \tag{4.43}$$

dove | significa 'calcolato a $(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c})$'. Nel primo termine si riconosce la formula di Laplace per il campo magnetico $\mathbf{B}$.

Per semplicità ritorniamo al caso sinusoidale; le (4.42) diventano:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-i\omega t}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3r' \quad ; \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|-i\omega t}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3r' \tag{4.44}$$

Vogliamo calcolare il campo $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ nel caso in cui le sorgenti sono localizzate in un raggio $\sim d$ e per $r >> \lambda > d$, cioè calcolare il campo 'di radiazione', lontano dalle sorgenti; calcolato $\mathbf{B}$, dalla legge di Ampère avremo $\mathbf{E} = i\frac{c^2}{\omega} \nabla \wedge \mathbf{B}$. Usiamo l'approssimazione $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \simeq r - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' + ...$ usata per es. per dedurre il potenziale di un dipolo elettrico. I termini successivi di questo sviluppo vanno come $\frac{1}{r}$, e non contribuiscono ai campi di radiazione. Abbiamo quindi:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{i(kr-\omega t)-ik\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'+..}}{r - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' + ..} d^3r' \simeq \frac{\mu_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r} \sum_0^\infty \frac{(-ik)^n}{n!} \int \mathbf{J}(\mathbf{x}')(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}')^n d^3r' \tag{4.45}$$

Questo è lo sviluppo in multipoli del campo di radiazione. Consideriamo per ora solo il termine con $n = 0$, che sarà in generale dominante; per capirne il significato, usiamo la legge di conservazione di conservazione della carica: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ e l'identità:

$$J_x = \partial_x(xJ_x) + \partial_y(xJ_y) + \partial_z(xJ_z) - x(\partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z)$$

integrando le componenti di $\mathbf{J}$, il primo termine è una divergenza che possiamo trasformare in integrale di superficie, e darà un contributo nullo. Otteniamo quindi:

$$\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega t} d^3r' = -\int \mathbf{x}'(\nabla' \cdot \mathbf{J}) e^{-i\omega t} d^3r' = \frac{d}{dt} \int \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') e^{-i\omega t} d^3r' = -i\omega \mathbf{p} e^{-i\omega t}$$

dove $\mathbf{p}e^{-i\omega t}$ è il <u>momento di dipolo elettrico</u>. Scopriamo quindi che il termine dominante del campo di radiazione è proporzionale alla derivata del momento di dipolo elettrico. Esplicitamente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \simeq -\frac{\mu_0 i\omega}{4\pi} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \mathbf{p} = -i\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} k\, \mathbf{p}\, \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \tag{4.46}$$

Il rotore di $\mathbf{A}$, sempre conservando solo i termini che vanno come $\frac{1}{r}$, dà:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} k^2\, \hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{p} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \quad ; \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{x}} \tag{4.47}$$

quindi un'onda di tipo sferico, con $(\mathbf{x}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ perpendicolari fra loro e orientati come $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$; il vettore di Poynting, mediato su un periodo sarà:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2\mu_0} \overline{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^*} = \frac{1}{2\mu_0} \hat{\mathbf{x}}\, c\, \overline{|\mathbf{B}^2|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4}{8\pi c^3} \frac{\hat{\mathbf{x}}}{r^2} |\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{p}|^2 \tag{4.48}$$

Se $\mathbf{p}$ sta sull'asse z, questo mi da un fattore $\sin^2\theta$, che da' potenza massima nel piano x-y. Detto in un altro modo, la potenza totale nell'angolo solido $d\Omega$ è

$$\frac{dP_{tot}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4}{8\pi c^3}|\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{p}|^2$$

La potenza totale emessa si ottiene integrando su una sfera che circonda la sorgente:

$$P_{tot} = \int_{Sfera} \overline{\mathbf{\Pi}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 p^2}{8\pi c^3 r^2}\int \sin^2\theta\, r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 p^2}{3c^3} \tag{4.49}$$

Questa è la 'formula del dipolo': il messaggio fondamentale è che la potenza totale emessa è proporzionale al quadrato della derivata seconda del momento di dipolo elettrico,

$$P_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{\overline{\ddot{\mathbf{p}}^2}}{c^3} \tag{4.50}$$

(ma se la sorgente non è periodica bisogna un po' intendersi su che significa fare la media di $\ddot{\mathbf{p}}^2$).

Esempio 1.: Per una particella libera esposta and un'onda piana monocromatica avremo, trascurando la forza magnetica, $m\mathbf{a} = q\mathbf{E}$, quindi $\ddot{\mathbf{p}} = \frac{q^2}{m}\mathbf{E}$; la particella si muove di moto accelerato, quindi irradia una potenza totale media $\overline{P}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3}\frac{q^4|\mathbf{E}_0|^2}{m^2c^3}$; una parte dell'onda incidente viene diffusa. L'intensità media dell'onda è $I = \frac{1}{2Z_0}|\mathbf{E}_0|^2$; il rapporto tra la potenza diffusa e l'intensità dell'onda incidente ha le dimensioni di un'area:

$$\sigma_T = \frac{\overline{P}_{tot}}{I} = \frac{8\pi}{3}(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{mc^2})^2 \tag{4.51}$$

la 'sezione d'urto Thompson' per la diffusione di un'onda e.m. da una carica libera (valida per grandi lunghezze d'onda). A $r_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{mc^2}$ si da il nome di 'raggio classico' della particella (per un elettrone $r_e \simeq 2.82\ 10^{-15}$ m).

La polarizzazione dell'onda emessa è data dal vettore (complesso) campo elettrico, che dalla (4.47) è proporzionale a $(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{p}) \wedge \hat{\mathbf{x}}$; se pongo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_0 E_0$, trovo un campo emesso

$$\mathbf{E} = \frac{r_c}{r}E_0\,\mathrm{Re}\,(\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{e}_0) \wedge \hat{\mathbf{r}}\, e^{i(kr-\omega t)}$$

La componente con polarizzazione $\mathbf{e}$ sarà:

$$\frac{r_c E_0}{r}\,\mathrm{Re}\,((\mathbf{e})\,\mathbf{e}^* \cdot (\hat{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{e}_0) \wedge \hat{\mathbf{r}} e^{i(kr-\omega t)}) = \frac{r_c E_0}{r}\mathrm{Re}\,((\mathbf{e})\,\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0\, e^{i(kr-\omega t)})$$

(perché $\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$). Rapportando l'intensità corrispondente volte r^2 all'intensità incindente troviamo la 'sezione d'urto differenziale'

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{pol.} = r_c^2\,|\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e}_0|^2$$

Se la radiazione incidente non è polarizzata e ignoriamo la polarizzazione emessa, dobbiamo sommare il campo sulle possibili polarizzazioni finali, e mediare l'intensità su quelle iniziali:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{non\ pol.} = r_c^2\,\tfrac{1}{2}\sum_\beta |\sum_\alpha \mathbf{e}^*_\alpha \cdot \mathbf{e}_{0\beta}|^2 = \tfrac{1}{2}r_c^2\sum_\beta\sum_{\alpha i} e^*_{\alpha i}e_{0\beta i}\sum_{\gamma i} e_{\gamma j}e^*_{0\beta j}$$

Il calcolo esplicito è istruttivo; prendiamo una base di vettori di polarizzazione reale (due polarizzazioni trasverse). Se supponiamo che la radiazione incidente sia diretta lungo z, $\mathbf{e}_{01} = \hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{e}_{02} = \hat{\mathbf{j}}$; quella uscente è diretta lungo $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{i}}\sin\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta\sin\varphi + \hat{\mathbf{k}}\cos\theta$. Con un po' di pazienza si ricava

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta(\hat{\mathbf{i}}\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\sin\varphi) - \hat{\mathbf{k}}\sin\theta\ , \quad \mathbf{e}_2 = -\hat{\mathbf{i}}\sin\varphi + \hat{\mathbf{j}}\cos\varphi$$

Facendo il calcolo, si trova

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{non\ pol.} = r_c^2\,\tfrac{1}{2}(1+\cos^2\theta)$$

che integrata in $d\Omega$ dà di nuovo la (4.51) . E' più facile usare i proiettori: siccome i vettori di polarizzazione sono perpendicolari alla direzione di propagazione, deve essere che il tensore $\pi_{0ij} = \sum_\beta e_{0\beta i}e^*_{0\beta j} = \delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j$ (dove $k_i = (0,0,1)$), e quindi

$$\sum_{\alpha\beta ij} e^*_{\alpha i}e_{0\beta i}e_{\gamma j}e^*_{0\beta j} = \sum_{\alpha\gamma ij}(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j)e^*_{\alpha i}e_{\gamma j} = 2 - \sin^2\theta = 1 + \cos^2\theta$$

Esempio 2.: Il calcolo del campo e.m. emesso da un'antenna è in generale molto difficile[2]; occupa interi dipartimenti di ingegneria elettronica. Per avere un'idea, Supponiamo di conoscere la corrente che vi circola, e consideriamo un filo rettilineo lungo $d << \lambda$ disposto lungo l'asse z, diviso e alimentato al centro in modo che la corrente sia $I(z,t) = I_0\cos\frac{\pi z}{d}\cos\omega t$ (la corrente alle estremità $z = \pm d/2$ deve essere zero). Dalla conservazione della carica $\frac{\partial\lambda_c}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0$ troviamo la densità lineare di carica $\lambda_c = \frac{\pi}{\omega d}I_0\sin\frac{\pi z}{d}\sin\omega t$, e poi:

$$p = \int_{-d/2}^{d/2} z\lambda_c(z,t)dz = \frac{2I_0 d}{\pi\omega}\sin\omega t \quad \rightarrow \quad \overline{P}_{tot.emessa} = \frac{4}{3\pi}(\frac{d}{\lambda})^2 Z_0\,\tfrac{1}{2}I_0^2$$

(dove $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$). il coefficiente di $\frac{1}{2}I_0^2$ si chiama 'impedenza di radiazione' dell'antenna, e per il suo funzionamento è importante tenerne conto nella scelta del cavo che la alimenta.

Esempio 3.: 'Il collasso classico dell'atomo di idrogeno'.

Il messaggio forte della (4.48) o (4.50) è che una carica accelerata irradia, e questo mette subito in crisi il modello dell'atomo di Rutherford. Se un elettrone gira intorno a un nucleo si muove di moto accelerato, quindi dovrebbe irradiare, quindi perdere energia e cadere nel nucleo; come è noto, questo non succede affatto, e gli atomi sono perfettamente stabili. Per avere un'idea di quanto sia grave questo disastro della fisica classica, possiamo valutare quanto potrebbe durare, classicamente, l'atomo di idrogeno. Abbiamo (spero che i simboli e l'approssimazione siano chiari):

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \quad , \quad m\omega^2 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad \omega^2 r = \frac{16\pi\epsilon_0\mathcal{E}^2}{me^2}$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{\overline{\ddot{\mathbf{p}}^2}}{c^3} \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3c^3}\tfrac{1}{2}e^2\omega^4 r^2 = -\frac{16\pi\epsilon_0}{3c^3m^2e^2}\mathcal{E}^4$$

[13] Possiamo separare le variabili nell'equazione differenziale, $\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^4} = -k\ dt$, e integrare in dt da 0 al tempo t_x, in $d\mathcal{E}$ da $\mathcal{E}_0 \simeq -13$ eV fino a $\mathcal{E} = -\infty$ (cadendo a $r = 0$ l'elettrone emetterebbe un energia infinita!). Otterrei, con $mc^2 = 0.5\,\mathrm{MeV}$, $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2.8\ 10^{-15}$ m:

$$t_x = -\frac{c^3m^2e^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{\mathcal{E}_0^3} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}(\frac{mc^2}{|\mathcal{E}_0|})^3\frac{1}{c} = \frac{r_e}{2c}(\frac{mc^2}{|\mathcal{E}_0|})^3 \simeq 0.27\,10^{-9}\ s$$

Esempio 4.: Diffusione da una sfera di dielettrico (Rayleigh).

Una sfera di dielettrico posta in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$ si polarizza uniformemente con $\mathbf{P} = 3\epsilon_0\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2}\mathbf{E}_0$ (cfr. [1], pg.162, esempio 5.5). Se ha raggio a e viene investita da un'onda e.m. con $\lambda >> a$, avremo approssivamente un dipolo oscillante $\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi a^3\mathbf{P}$, e quindi una potenza emessa:

$$\overline{P}_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3c^3}(\omega^2\frac{4}{3}\pi a^3 3\epsilon_0\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2})^2\overline{\mathbf{E}^2} = \frac{8\pi}{3}a^2(ak)^4\left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2}\right)^2 I_{inc.}$$

(ho usato $I_{inc} = \frac{\overline{\mathbf{E}^2}}{\mu_0 c}$, $k = \frac{\omega}{c}$, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$). Questa è la potenza assorbita e riemessa dalla sfera, che avrà quindi in questa appossimazione una sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}a^2(ak)^4\left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2}\right)^2$$

Notare però che, perché l'approssimazione di dipolo sia valida, la per la lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ deve essere $\lambda >> a$. Per la distribuzione angolare e la polarizzazione della radiazione diffusa, cfr.[2] 9.6. Gli effetti più interessanti si hanno nel limite opposto e si calcolano con l'ottica geometrica (per es., l'arcobaleno) cfr. Andrea Frova, 'perchè succede quello che succede', che è un libro divulgativo e interessante.

Esempio 5.: Diffusione da dipoli elettrici (Rayleigh).

[13] in precedenza avevamo posto $\dot{\mathbf{p}} = -i\omega\mathbf{p}$ pensando a una carica oscillante, che non è vero se l'elettrone gira; ma è ancora vero che $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2\mathbf{p}$.

Questo esempio è importante e famoso (ma qui semplificato). Suppongo di avere un gas rarefatto con n molecole/m^3 polarizzabili. In presenza di un campo $\mathbf{E}$ avrò quindi una densità di polarizzazione $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \mathbf{E} = n < \mathbf{p} > \to < \mathbf{p} >= \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{n} \mathbf{E}$ = dipolo medio acquisito da una molecola. In presenza di un'onda e.m. il singolo dipolo emetterá quindi una potenza:

$$\overline{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \epsilon_0^2 \frac{(\epsilon_r - 1)^2}{n^2} \omega^4 \mu_0 c I_{inc} = \frac{(\epsilon_r - 1)^2 k^4}{6\pi n^2} I_{inc}$$

con una sezione d'urto $\sigma = \overline{P}/I_{inc}$. Questa emissione è alla base del fenomeno della diffusione della luce nell'atmosfera. Il k^4 a numeratore implica che le lunghezze d'onda più piccole (azzurro-violetto) sono assorbite e diffuse molto di più delle altre, e spiega il colore azzurro del cielo[14], il rosso del tramonto (le frequenze alte son assorbite di più), etc.. In termini dell'indice di rifrazione n_r, $(\epsilon_r - 1) = (n_r^2 - 1) \simeq 2(n_r - 1)$ e per l'aria nel visibile $(n_r - 1) \simeq 2.78\ 10^{-4}$. L'$n^2$ a denominatore è altrettanto interessante. La diffusione provoca un assorbimento dell'onda, che in funzione della distanza percorsa avrà un'intensità $I = I_0 e^{-x/\Lambda}$, dove la lunghezza di assorbimento Λ, per un argomento simile a quello usato per definire il cammino libero medio nella teoria dei gas, è definita in modo che $n\sigma\Lambda = 1$, quindi $\Lambda = \frac{1}{\sigma n} = \frac{6\pi n}{(\epsilon_r - 1)k^4} = \frac{3\pi n}{(n_r - 1)k^4}$. Misurando Λ e conoscendo n_r posso determinare n, ed è proprio su questa base che a Lord Rayleigh riuscì la prima (credo) misura del numero di Avogadro. Questo ragionamento mi è sempre sembrato particolarmente brillante. Con $n \simeq 2.69\ 10^{25}$ molecole/m^3 si trova che Λ varia tra 30 – 188 km per violetto – rosso (ma naturalmente un calcolo realistico è complicato, in particolare dalla presenza di vapor d'acqua, cfr.[2]).

Multipoli.

La formula di Larmor è stata ottenuta in approssimazione di dipolo elettrico. Vorrei riconsiderare l'approssimazione e calcolare il termine successivo dello sviluppo in multipoli del campo di radiazione. Questo sviluppo è importante nella teoria delle antenne, in fisica atomica e in fisica nucleare. Riscrivo la (4.45) in componenti, e fermando lo sviluppo al primo ordine ottengo:

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)_i \simeq \int \mathbf{J}(\mathbf{x}')_i \frac{e^{i(kx - \omega t) - ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' + ..}}{x - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' + ..} d^3x' \simeq \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{x} \int \big(J(\mathbf{x}')_i - ikJ(\mathbf{x}')_i \frac{x_j x'_j}{x} \big) d^3x' \tag{4.52}$$

è inutile migliorare l'approssimazione di $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, perché il termine successivo decresce come $\frac{1}{x}$. Per lo stesso motivo, calcolando $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{E}$, il pezzo radiativo che va giù come $\frac{1}{x}$ è:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)_i = \frac{\mu_0 e^{i(kx - \omega t)}}{4\pi x^2} \int d^3x' \Big(ik\epsilon_{ijk} x_j J(\mathbf{x}')_k + \frac{k^2}{x} \epsilon_{ijk} x_l x_j x'_l J(\mathbf{x}')_k \Big) \tag{4.53}$$

[14] che è più azzurro che violetto perché lo spettro della radiazione solare ha un massimo per il giallo

Osservo le identità:

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{x}')_i &= \partial'_k\big(x'_i J(\mathbf{x}')_k\big) - x'_i \partial'_k J(\mathbf{x}')_k \\
x'_j J(\mathbf{x}')_i + x'_i J(\mathbf{x}')_j &= \partial'_k\big(x'_i x'_j J(\mathbf{x}')_k\big) - x'_i x'_j \partial'_k J(\mathbf{x}')_k
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

e sostituisco nella (4.52); nell'integrale ignoro come prima i termini $\partial'_k(..)_k$, e uso la conservazione della carica. Il primo termine è quello di dipolo elettrico che abbiamo già considerato; per il pezzo nuovo:

$$
\begin{aligned}
\int d^3x' (x_j x'_j J_i e^{-i\omega t}) &= \int d^3x' \big(\tfrac{1}{2} x_j (x'_j J_i + x'_i J_j) e^{-i\omega t} + \tfrac{1}{2} x_j (x'_j J_i - x'_i J_j) e^{-i\omega t}\big) = \\
&= \int d^3x' \Big(\tfrac{1}{2} x_j \partial_t \big(x'_i x'_j \rho(\mathbf{x}') e^{-i\omega t}\big) + \tfrac{1}{2} x_j (x'_j J_i - x'_i J_j) e^{-i\omega t}\Big)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

In questa espressione nel secondo termine riconosco il contributo del dipolo magnetico:

$$
\tfrac{1}{2} \int d^3x' \, x_j (x'_j J_i(\mathbf{x}') - x'_i J_j(\mathbf{x}')) e^{-i\omega t} = \int d^3x' [(\tfrac{1}{2} \mathbf{x}' \wedge \mathbf{J}) \wedge \mathbf{x}]_i = \mathbf{m}(t) \wedge \mathbf{x}
$$

Ricordo poi la definizione di quadrupolo elettrico

$$
Q_{ij}(t) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') e^{-i\omega t} (3x'_i x'_j - \delta_{ij} x'_k x'_k)
$$

Qui trovo un termine $\delta_{ij}..$ che nella (4.55) non c'è; ma si vede dalla (4.53) che non contribuisce ai campi $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$, e quindi lo posso aggiungere tranquillamente. Mettendo insieme i pezzi, trovo:

$$
A(\mathbf{x}, t)_i = \frac{\mu_0 \, e^{ikx}}{4\pi \, x} \big(\dot{p}_i + \frac{1}{6cx} \ddot{Q}_{ij} x_j + \frac{1}{cx} (\dot{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{x})_i\big) \tag{4.56}
$$

Con uno sforzo finale calcolo il campo magnetico irradiato:

$$
\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0 e^{ikx}}{4\pi x} \Big(-(\hat{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{p}})_i + \epsilon_{ijk} \frac{x_j \ddot{Q}_{kl} x_l}{x^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{m}_j (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) \Big) \tag{4.57}
$$

5. Formulazione covariante dell'elettromagnetismo

Nature, and Nature's laws, lay hid in night;
God said, *Let Newton be!* and all was light. (Alexander Pope)
It did not last; the Devil, howling *Ho!*
Let Einstein be! restored the status quo. (J.C. Squire)

Do per acquisita una certa conoscenza della teoria della relatività ristretta: trasformazioni di Lorentz, dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze etc., e mi limito qui a dettagliare il passaggio alla formulazione à la Minkowski.

Le leggi di trasformazione 'classiche' dei campi elettromagnetici.

Ricordando che la teoria della relatività è nata dalle meditazioni di Einstein (che non è chiaro se sapesse dell'esperimento di Michelson) sull'elettrodinamica dei corpi in movimento, vorrei iniziare informalmente indicando come mai la teoria di Maxwell entra in conflitto con la cinematica classica; per farlo, possiamo derivare (in modo elementare e molto alla buona) le leggi di trasformazione dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nel passaggio da un riferimento inerziale $\mathcal{O}$ ad un altro $\mathcal{O}'$, che si muove con velocità costante $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{O}$ (cfr. [1] pg.289, §8.8). Suppongo che in $\mathcal{O}$ ci sia un filo carico parallelo a $\mathbf{v}$, con densità lineare di carica λ, e quindi un campo elettrico $\mathbf{E}_\perp = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\mathbf{x}_\perp|}\hat{\mathbf{x}}_\perp$; ci saranno poi campi $\mathbf{E}_\parallel$ e $\mathbf{B}_\perp,\ \mathbf{B}_\parallel$.

Un signore in $\mathcal{O}'$ valuterà il campo elettrico $\mathbf{E}'_\perp$ misurando la forza che agisce su una carica che per es. ha in mano, e deciderà quindi che:

$$\mathbf{E}'_\perp = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_\perp \tag{a}$$

Per misurare il campo magnetico $\mathbf{B}'_\perp$ ha una bussola; oltre a $\mathbf{B}_\perp$, troverá che il filo carico, che si muove rispetto a lui con velocità $-\mathbf{v}$, da' luogo a una corrente $i = \lambda v$, e a un campo di Biot–Savart $\frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi|\mathbf{x}_\perp|}$; più precisamente, usando le solite regole vettoriali e $\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, un campo pari a $-\frac{1}{c^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}_\perp$, e quindi:

$$\mathbf{B}'_\perp = \mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}_\perp \tag{b}$$

Ho ignorato i campi $\mathbf{E}_\parallel$ e $\mathbf{B}_\parallel$ che non contribuiscono ai prodotti vettoriali, e che non mi aspetto che cambino al cambiamento del riferimento. Posto che possono essere ricavate in modo più convincente, le (a) e (b) sono davvero quello che si ottiene combinando le equazioni di Maxwell con la cinematica galileiana; sono semplici e convincenti, e hanno un'aria generale. Il loro problema è che non sono reversibili: non posso scambiare i ruoli di $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ cambiando $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$, perché trovo, per es.:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_\perp = \mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge (\mathbf{B}'_\perp + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}_\perp) = \mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}'_\perp + \frac{v^2}{c^2}\mathbf{E}_\perp \\
&\quad \to \quad \mathbf{E}_\perp = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\big(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}'_\perp\big)
\end{aligned}$$

quindi una legge diversa dalla (a), che indica che il riferimento $\mathcal{O}$ è privilegiato, in contrasto con il principio di relatività; la stessa situazione si trova invertendo la (b).

Il privilegio di $\mathcal{O}$ viene eliminato se cambio arbitrariamente le regole del gioco e moltiplico il membro destro delle (a) e (b) per $\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; lo si può verificare ripetendo il ragionamento precedente; ma questo non è un modo serio per ricavare le leggi della relatività; ma può darsi che 'qualcuno' ci abbia pensato prima di trovare il modo serio, perché l'arbitraria modifica dà in effetti le corrette leggi relativistiche.

Lo spazio di Minkovski e il formalismo covariante.

Le trasformazioni di Lorentz tra due riferimenti in moto relativo lungo l'asse x sono:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad , \quad \beta := \frac{v}{c} \quad , \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.1}$$

da queste seguono tra l'altro le leggi sulla contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi $\Delta l = \Delta l_0 \sqrt{1-\beta^2}$, $\quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Per un punto che segue una curva oraria $x = x(t)$, definendo $\widetilde{\beta} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt}$, $\widetilde{\beta}' = \frac{1}{c}\frac{dx'}{dt'}$, ne ricavo che:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \quad \rightarrow \quad \widetilde{\beta}' = \frac{\widetilde{\beta} - \beta}{1 - \beta\widetilde{\beta}} \tag{5.2}$$

Esempio: il magnetismo come fenomeno relativistico.

Questa è un'applicazione fantasiosa delle leggi sulla contrazione delle lunghezze e sulle trasformazioni delle velocità, inventata (credo) da Purcell (Elettricità e magnetismo, la Fisica di Berkeley, ed. Zanichelli) e ripresa in [3]. Sull'asse x ho due fili carichi, con densità di carica $\pm\lambda$, che si muovono con velocità $\pm v$. Quindi una corrente $I = 2\lambda v$, e mi aspetto campo elettrico nullo, e forza elettrica nulla su una carica $q > 0$ che si muova con velocitá $u < v$ parralela ai fili; ma sarà vero?. Notiamo subito che siccome i fili si muovono, per via della contrazione delle lunghezze, la densità di carica sarà $\lambda = \gamma\lambda_0$, se λ_0 è la densità di carica dei fili quando stanno fermi. In un riferimento solidale con la carica, i fili si muovono con velcità $v_\pm = \frac{\pm v - u}{1 \mp uv/c^2}$, e siccome $|v_+| < |v_-|$, e $\gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{1-v_+^2/c^2}} < \gamma_- = \frac{1}{\sqrt{1-v_-^2/c^2}}$, la contrazione sarà maggiore per il filo con carica negativa, e ci sarà, in questo riferimento, un eccesso di carica negativa; con un po' di algebra si ricava, per densità totale di carica

$$\lambda_{tot} = (\gamma_+ - \gamma_-)\lambda_0 = \frac{-2\lambda uv}{c^2\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Di conseguenza una forza elettrica sulla carica, che in questo riferimento sarà $F' = q\frac{\lambda_{tot}}{2\pi\epsilon_0 r_\perp}$, diretta verso i fili. Nel riferimento di partenza questa forza diventa

$$F = \sqrt{1-u^2/c^2}F' = -\frac{2\lambda v}{2\pi\epsilon_0 r_\perp}qu = -qu\frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{I}{2\pi r_\perp}$$

ma certamente non è elettrica (è prporzionale alla velocità!). E' appunto la forza dovuta al campo magnetico $\frac{\mu_0 I}{2\pi r_\perp}$.

Ora vorrei osservare che le equazioni della fisica classica, e in particolare le equazioni di Maxwell, sono scritte in forma vettoriale non (solo) per risparmiare spazio, ma per esprimere il fatto fondamentale che lo spazio è isotropo (non esistono direzioni privilegiate), e la teoria è invariante, o meglio, "covariante", per rotazioni. In una teoria relativistica vogliamo una notazione che esprima il fatto fondamentale che tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti, perché l'etere non esiste. Questa è la notazione covariante di Minkowski, in cui le leggi fisiche sono espresse da relazioni fra scalari (oggetti invarianti per trf. di Lorentz), quadrivettori (relazioni covarianti per trf. di Lorentz), quadritensori etc.. L'archetipo del quadrivettore è l''evento', che in un dato riferimento inerziale ha (quadri)coordinate:

$$x^\mu := (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct,\, x,\, y,\, z) := (ct, \mathbf{x}) \tag{5.3}$$

e dà l'istante e la posizione dell'evento rispetto all'evento-origine $ct = x = y = z = 0$. In un altro riferimento inerziale lo stesso evento avrà coordinate legate alle prime da una trf. di Lorentz, espressa da una matrice 4 x 4:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{5.4}$$

Qui ho usato la 'convenzione di Einstein', un indice ripetuto sopra e sotto si intende sommato da 0 a 3. La proprietà caratteristica delle trf. di Lorentz, conseguenza dell'invarianza della velocità della luce, è espressa da:

$$x^2 := \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu := -c^2t^2 + \mathbf{x}^2 = -c^2t'^2 + \mathbf{x}'^2 := \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu := x'^2 \ , \qquad \forall\ x \tag{5.5}$$

e quindi da:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} \tag{5.6}$$

Il 'tensore metrico' $\eta_{\mu\nu}$ è diagonale con valori $(-1, +1, +1, +1)$ (in gergo, 'east coast metric'; la scelta opposta $(+ - - -)$, 'west coast metric', è quasi altrettanto comune, una difficoltà con cui si impara a convivere). Aiutandosi con un disegno del piano (x, ct) si capisce che se $x^2 < 0$ ('x è di tipo tempo') l'evento può essere causalmente connesso con l'evento origine, per es. da un segnale che si propaga con $v < c$; se $x^2 = 0$ ('x è di tipo luce') solo se il segnale si propaga con $v = c$; e se $x^2 > 0$ ('x è di tipo spazio') evento ed evento origine non possono essere causalmente connessi, anzi esiste un riferimento in cui $t' = 0$ e quindi sono contemporanei. E' nota la difficoltà che l'esistenza della velocità limite c pone agli autori di fantascienza: è impossible fare una bella guerra interstellare, ci vuole troppo tempo.

Se parametrizziamo la curva oraria di un punto materiale invece che con il tempo t di un riferimento con il suo 'tempo proprio' τ, quello segnato da un orologio solidale con il punto materiale, $dt = \frac{1}{\sqrt{1-\widetilde{\beta}^2}} d\tau = \widetilde{\gamma} d\tau$ e possiamo definire la quadrivelocità:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\widetilde{\gamma} c,\ \widetilde{\gamma}\widetilde{\mathbf{v}}) \quad : \quad \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2 \tag{5.7}$$

che è un quadrivettore, perché $d\tau$ è un invariante. E infatti, cambiando riferimento:

$$v'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu \ = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma} c \\ \widetilde{\gamma}\widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\widetilde{\gamma} - \beta\gamma\widetilde{\gamma}\widetilde{v} \\ -c\beta\gamma\widetilde{\gamma} + \gamma\widetilde{\gamma}\widetilde{v} \end{pmatrix} = c\gamma\widetilde{\gamma} \begin{pmatrix} 1 - \beta\widetilde{\beta} \\ \widetilde{\beta} - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}' c \\ \widetilde{\gamma}'\widetilde{v}' \end{pmatrix}$$

l'ultimo passaggio è quello cruciale: invece di verificarlo direttamente, osservare che dalla penultima espressione v'^1/v'^0 è proprio il $\widetilde{\beta}'$ dato dalla (5.2), e $(v'^1)^2 - (v'^0)^2 = -c^2$. L'introduzione della quadrivelocità linearizza la (5.2).

Con la quadrivelocità e la massa di riposo del punto materiale definiamo il quadriimpulso $p^\mu = mv^\mu = (mc\gamma, m\gamma v) = (\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p})$, $p^2 = -(\frac{\mathcal{E}}{c})^2 + \mathbf{p}^2 = -m^2c^2$. Questo è il passaggio più famoso, $\mathcal{E} = m\gamma c^2$, che qui viene contrabbandato come una 'necessità logica'.La 'necessità logica' sta in questo: porre $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ equivale a supporre che la 'massa inerziale' varia con la velocità come $m_I = m\gamma$, e quindi per una forza $\mathbf{f}$ vale $\mathbf{f} = \frac{d}{dt}m_I\mathbf{v}$. Nell'unità di tempo questa forza compie lavoro

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(m_I\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}m\frac{d\mathbf{v}^2}{dt}\gamma + m\mathbf{v}^2\frac{d\gamma}{dt}$$

Ma $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{v}^2}{dt}\gamma^3$, e quindi

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(m_I\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}m\frac{d\mathbf{v}^2}{dt}\gamma + m\mathbf{v}^2\tfrac{1}{2}\gamma^3\frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \tfrac{1}{2}m\frac{d\mathbf{v}^2}{dt}\gamma(1+\gamma^2\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}) = \tfrac{1}{2}m\frac{d\mathbf{v}^2}{dt}\gamma^3 = \frac{d}{dt}m\gamma c^2$$

Questo è il teorema delle forze vive, riveduto e corretto, che suggerisce (a Einstein) di porre $\mathcal{E} = m\gamma c^2$.

Do per noto come si deriva dalla conservazione del quadriimpulso la cinematica degli urti elastici e non. Non c'è molta altra dinamica relativistica, che non sia teoria dei campi, o degli effetti dei campi sulle particelle. In particolare, non c'è l'oscillatore armonico. In compenso c'è la teoria della stringa, ma è arrivata tardi.

Le equazioni dell'elettromagnetismo in forma covariante.

Per avvicinarci all'elettromagnetismo dobbiamo definire 'campi', che possono essere scalari, (quadri)-vettoriali, etc. . Cominciamo con l'osservare che se

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \to \quad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla)$$

Si dice che x^μ è 'controvariante' e ∂_μ (quindi un gradiente) è 'covariante'; posso passare dall'uno all'altro, quindi alzare o abbassare gli indici, con $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu}$; 'contraendo', cioè sommando da 0 a 3, un indice covariante con uno controvariante ottengo un invariante.

Un esempio di invariante è l'operatore di D'Alembert $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; una soluzione dell'equazione di D'Alembert $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi(x) = 0$ lo è in ogni riferimento se poniamo $\phi'(x') = \phi(x)$. Per la soluzione 'onda piana' questo significa che $(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ è un quadrivettore e $(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)$ un invariante; ne seguono le formule per l'effetto Doppler.

Venendo all'elettrodinamica, con una qualche inconstintenza, uso il sistema di unità di Heavyside-Lorentz nel resto di questa sezione. Postulo che la carica elettrica è la stessa in tutti i riferimenti, e quindi è un invariante, e definisco la quadricorrente elettrica

$$J^\mu(x) := (c\rho(x), \mathbf{J}(x)), \quad \text{legge di trasformazione: } J'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(x),$$
$$\rightarrow \quad \partial_\mu J^\mu(x) = \partial'_\mu J'^\mu(x') = \text{ invariante } = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Per convincerci che quadricorrente così definita è davvero un quadrivettore, calcoliamo la quadricorrente di una carica puntiforme. Sappiamo che:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \quad , \quad \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = q\frac{d\mathbf{x}}{dt}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))$$

messi assieme non somigliano a un quadrivettore; ma posso ragionare così:

$$\begin{aligned} J^\mu(x) = (c\rho, \mathbf{J}) &= \int q(c, \frac{d\mathbf{x}}{dt})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))\delta(x^0 - ct)d(ct) = \\ &= \int q\,\frac{dx^\mu}{dt}\delta^{(4)}(x - x(t))d(ct) = \int q\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\delta^{(4)}(x - x(\tau))d(c\tau) \end{aligned} \tag{5.8}$$

nell'ultimo passaggio ho usato di nuovo $\gamma d\tau = dt$; questo dimostra che J^μ è un quadrivettore come $\frac{dx^\mu}{d\tau}$, perche $d\tau$ è un invariante e così pure δ^4 perché $\det \Lambda = 1$.

Riesco quindi a scrivere la legge di conservazione della carica in modo che valga in ogni riferimento. Uso la stessa strategia per scrivere le equazioni di Maxwell in forma covariante. In unità di Heavyside-Lorentz definisco il (quadri)-tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$, e poi il (quadri)-potenziale elettromagnetico come segue:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad , \; A_\mu = \eta_{\mu\mu'}A^{\mu'} = (-\phi, \mathbf{A}) \\ F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'}F^{\mu'\nu'} &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned} \tag{5.9}$$

L'ultima equazione è da verificare, per es:

$$F_{01} = -E_x = \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad F_{12} = B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \; , \quad \text{etc.}$$

quindi $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, $\;,\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. In modo analogo possiamo verificare che le equazioni di Maxwell non omogenee possono essere scritte nella forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}\,J^\nu \tag{5.10}$$

per es.:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = -\partial_x E_x - \partial_y E_y - \partial_z E_z = -\frac{1}{c} c\rho \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$
$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \partial_y B_z + \partial_z B_y = -\frac{1}{c} J_x \quad \rightarrow \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Le equazioni di Maxwell omogenee sono automatiche se definiamo $F^{\mu\nu}$ in termini del quadripotenziale; esplicitamente hanno la forma:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{5.11}$$

Tutto questo dimostra che il formalismo è elegante, non che sia 'vero'. Un controllo che possiamo fare è la verifica che al cambiare del riferimento la trasformazione di $F^{\mu\nu}$ ci rende le trasformazioni di $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ che avevamo ipotizzato nel paragrafo precedente. Questo esercizio procede così:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}F^{\mu'\nu'} =$$
$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x & \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(E_z + \beta B_y) \\ . & 0 & \gamma(B_z - \beta E_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z) \\ . & . & 0 & B_x \\ . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Per $v << c$, $\gamma \rightarrow 1$ e ritroviamo quindi le (a) e (b) del paragrafo precedente.

La seconda legge della dinamica per una carica puntiforme q soggetta alla forza di Lorentz ha la forma:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu}{}_{\nu} v^\nu \tag{5.12}$$

ricordando che (ometto le tilde) $\gamma d\tau = dt$, questa mi dà:

$$\begin{aligned} \gamma\frac{1}{c}\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q}{c}F^{0i}\gamma v_i = \frac{q}{c}\gamma\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \quad &\rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} = \frac{d}{dt}m\gamma c^2 \\ \gamma\frac{dp_x}{dt} = qE_x\gamma + \frac{q}{c}B_z\gamma v_y - \frac{q}{c}B_y\gamma v_z \quad &\rightarrow \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\wedge\mathbf{B} = \frac{d}{dt}m\gamma\mathbf{v} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Notare che è dalla prima di queste equazioni, che come abbiamo visto è il teorema delle forze vive, che Einstein ha ricavato $\mathcal{E} = m\gamma c^2$.

Esempi. Per una particella con carica q accelerata da un campo elettrico E parallelo alla sua velocità la prima delle (5.13) da': $qEv = mc^2\dot{\gamma} = mc^2\gamma^3\beta\dot{\beta}$. La seconda: $qE = m\dot{\gamma}v + m\gamma\dot{v} = m\gamma^3\beta\dot{\beta}v + m\gamma c\dot{\beta} = m\gamma^3\dot{\beta}(\beta v + \frac{c}{\gamma^2}) = m\gamma^3\dot{\beta}c$, che è la stessa di prima;

le prima equazione è conseguenza della seconda, come abbiamo visto in generale con il teorema delle forze vive.

Per ogni E, quando $\gamma \to \infty$, $\dot{\beta} \to 0$. Invece in un campo magnetico $\mathbf{B}$ uniforme e perpendicolare a $\mathbf{v}$, $\frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = 0 \to \dot{\gamma} = 0$. L'orbita è circolare con accelerazione centripeta $\frac{v^2}{R}$; dalla seconda $m\gamma\frac{v^2}{R} = \frac{qvB}{c} \to R = \frac{\mathcal{E}v}{qcB}$; per una particella relativistica $v \simeq c$ e $R \simeq \frac{\mathcal{E}}{qB}$, che diventa $R \simeq \frac{\mathcal{E}}{qcB}$ in MKS. Per es. se $\mathcal{E} = 6\,\mathrm{GeV}$, $q = e$, $B = 2\,\mathrm{T}$, $R \simeq \frac{6\cdot 10^9}{3\cdot 10^8\, 2} = 10\,\mathrm{m}$, indipendentemente dalla massa di riposo della particella.

Notiamo infine che se $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, la condizione di Lorentz $\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$ diventa $\partial_\mu A^\mu = 0$, quindi il gauge di Lorentz è covariante; quello di Coulomb, $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, certamente no.

Il tensore energia-impulso.

Questo paragrafo è tratto per lo più da [11]; il fine dell'esercizio è di convincersi che il 'tensore energia impulso' del campo elettromagnetico, dato da:

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}_{em} &= F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\nu\lambda} - \tfrac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} = \\
&= \begin{pmatrix} \rho_{\mathcal{E}} & E_yB_z - E_zB_y & E_zB_y - E_xB_z & E_xB_y - E_yB_x \\ . & -E_x^2 - B_x^2 + \rho_{\mathcal{E}} & -E_xE_y - B_xB_y & -E_xE_z - B_xB_z \\ . & . & -E_y^2 - B_y^2 + \rho_{\mathcal{E}} & -E_yE_z - B_yB_z \\ . & . & . & -E_z^2 - B_z^2 + \rho_{\mathcal{E}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

compendia le informazioni sull'energia e la quantità di moto del campo, e che è un concetto utile. In realtà più di quanto vedremo, per il suo ruolo centrale nella teoria della relatività generale.

L'espressione in termini di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ è complicata; ci basta notare che:

$$
\begin{aligned}
&F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} = -2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad , \quad T^{00}_{em} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \rho_{\mathcal{E}} \quad , \quad T^{i0}_{em} = (\mathbf{E}\wedge\mathbf{B})_i = \frac{1}{c}\Pi_i \\
&\eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{em} = 0 \quad , \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_{\mathcal{E}} & \frac{1}{c}\Pi_i \\ \frac{1}{c}\Pi_i & -\Pi_{ij} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

Notare che le componenti del tensore hanno dimensioni energia/volume. Dal teorema di Poynting segue che, in assenza di correnti, $\partial_\mu T^{\mu 0}_{em} = 0$. Ma possiamo dire molto di più. In generale:

$$
\partial_\nu T^{\mu\nu}_{em} = \partial_\nu F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\nu\lambda} + F^{\mu}{}_{\lambda}\partial_\nu F^{\nu\lambda} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\partial_\nu F^{\lambda\rho} \tag{5.16}
$$

Usando l'antisimmetria di $F^{\nu\lambda}$ e la (5.11):

$$
\partial_\nu F_{\mu\lambda}F^{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}(\partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\lambda F_{\nu\mu})F^{\nu\lambda} = -\tfrac{1}{2}\partial_\mu F_{\lambda\nu}F^{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}F_{\lambda\nu}\partial_\mu F^{\lambda\nu}
$$

i.e. il primo pezzo a destra nella (5.16) cancella l'ultimo, e con la (5.10):

$$
\partial_\nu T^{\mu\nu}_{em} = -\frac{1}{c}F^{\mu}{}_{\lambda}J^\lambda \tag{5.17}
$$

una forma covariante del teorema di Poynting. Supponiamo adesso che la 'materia' sia costituita da particelle libere puntiformi, con $x_n^\mu = (ct, \mathbf{x}_n(t))$, $p^\mu = (\mathcal{E}_n/c, \mathbf{p}_n)$, $n = 1, ..N$. Definisco allora il tensore energia-impulso di questa materia, $T_m^{\mu\nu}(x)$, in un punto $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$, come:

$$T_m^{\mu\nu}(x) = \sum_n p_n^\mu \frac{dx_n^\nu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = \sum_n c^2 \frac{p_n^\mu p_n^\nu}{\mathcal{E}_n} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \tag{5.18}$$

la seconda espressione, ottenuta usando $p_n^\nu = \frac{\mathcal{E}_n}{c^2} \frac{dx_n^\nu}{dt}$, dimostra che $T_m^{\mu\nu}$ è simmetrico. Per verificare che è un tensore, stesso trucco usato per la corrente, eq.(5.8):

$$T_m^{\mu\nu}(x) = \sum_n \int p_n^\mu \frac{dx_n^\nu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \delta(x^0 - ct) d\, ct = \sum_n \int p_n^\mu \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \delta^{(4)}(x - x_n) d\, c\tau_n$$

La conservazione dell'energia e della quantità di moto fa' si che $T_m^{\mu\nu}(x)$ sia 'conservato' in assenza di forze; infatti, in generale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} T_m^{\mu i} &= \sum_n p_n^\mu \frac{dx_n^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = - \sum_n p_n^\mu \frac{dx_n^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = \\ &= - \sum_n p_n^\mu \frac{\partial}{\partial t} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T_m^{\mu 0} + \sum_n \frac{dp_n^\mu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_m^{\mu\nu}(x) = \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \frac{dp_n^\mu}{dt} \tag{5.19}$$

dove il membro a destro è la 'densità di forza', che è certamente zero se le particelle sono libere. E' zero anche se le particelle compiono urti 'puntuali', perché allora posso scambiare la sommatoria con la δ e usare la conservazione del quadriimpulso. Se invece le particelle hanno cariche q_n, interagiscono con il campo elettromagnetico secondo la(5.12)e avrò:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T_m^{\mu\nu}(x) = \sum_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \frac{q_n}{c} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{1}{c} F^\mu{}_\nu J^\nu \tag{5.20}$$

Mettendo assieme le (5.20),(5.17) otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (T_{em}^{\mu\nu}(x) + T_m^{\mu\nu}(x)) = 0 \tag{5.21}$$

Notare che abbiamo usato praticamente tutto il nostro repertorio per ottenere questa equazione, che infatti riassume un bel po' di fisica. La (5.21) da' una forma generale ai principi di conservazione di energia e quantità di moto. Un 'sistema' con tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$ con quadridivergenza 0 avrà un quadriimpulso totale

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int T^{\mu 0} d^3x \; : \quad \frac{dP^\mu}{dt} = \int \frac{\partial}{c \partial t} T^{\mu 0} d^3x = - \int \frac{\partial}{\partial x^i} T^{\mu i} d^3x = - \int_{S_\infty} T^{\mu i} dS_i = 0 \tag{5.22}$$

In modo analogo è possibile definire il momento angolare totale del sistema, cfr.[4][11].

Ho trattato la materia come un insieme di punti materiali, ma è importante vedere come si può passare a una descrizione macroscopica, attraverso medie locali. Consideriamo un fluido 'perfetto', in un riferimento 'comovente', in cui cioè ci appaia, almeno localmente, omogeneo e isotropo. Dalla (5.18) avremo:

$$\begin{array}{rcl} n \simeq \sum \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)) & , & T^{00} = \sum \mathcal{E}_n \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)) \simeq \rho_{\mathcal{E}} \\ T^{io} = \sum p_n^i c\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)) \simeq 0 & , & T^{ij} = \sum p_n^i \dfrac{dx_n^j}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n(t)) \simeq \delta_{ij}\, p \end{array} \tag{5.23}$$

n è il numero di particelle per unità di volume; $\rho_{\mathcal{E}}$ è la densità di energia (=massa dinamica per c^2); nella seconda riga la prima equazione e il δ_{ij} nella seconda seguono dall'isotropia, p è la pressione, e viene da (una variante del) teorema del viriale di Clausius [15]

Posso passare a un riferimento non 'comovente', in cui il fluido ha localmente velocità $\mathbf{v}$, con una trf. di Lorentz $\Lambda^\mu{}_\nu(-\mathbf{v})$ e ottenere:

$$T^{\mu\nu} = p\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}(\rho_{\mathcal{E}} + p)v^\mu v^\nu \tag{5.24}$$

(perché nel riferimento comovente lo posso scrivere $p\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}(\rho_{\mathcal{E}} + p)(c, \mathbf{0})^\mu (c, \mathbf{0})^\nu$). Per una discussione più approfondita, che è necessaria sopra tutto in cosmologia, rimando a [11][4].

La Langrangeana del campo elettromagnetico

Questo argomento è importante sopra tutto per la quantizzazione del campo e.m., che nasce con Planck e la teoria quantistica, ma è stata poi formulata compiutamente per primo da E. Fermi. In meccanica alla Lagrangeana $L = T - V$ corrisponde la 'azione' $\mathcal{A} = \int dt L(q, \dot{q})$ ("Physics: where the action is"), da cui le equazioni del moto ('di Eulero–Lagrange') seguono attraverso il principio variazionale $\delta\mathcal{A} = 0$. La Lagrangeana è il DNA di una teoria: contiene tutte le informazioni sulle evoluzioni temporali che la teoria prevede e sulle simmetrie che la caratterizzano. Una teoria di campo come l'elettromagnetismo ha

[15] noto dalla teoria cinetica dei gas: se integro l'espressione microscopica su un volume V mi aspetto:

$$\int_V T^{ij} d^3x \simeq \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{x_n \in V} \mathbf{p}_n \frac{d\mathbf{x}_n}{dt} = \frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{d}{dt} \sum_{x_n \in V} \mathbf{p}_n \mathbf{x}_n - \frac{1}{3}\delta_{ij} \sum_{x_n \in V} \mathbf{x}_n \frac{d\mathbf{p}_n}{dt}$$

La derivata rispetto al tempo medierà a zero, l'ultimo pezzo è $-\frac{1}{3}\delta_{ij}\times$ il 'viriale'. Per il III principio ad esso non contribuiscono le forze che le particelle esercitano l'una sull'altra negli urti puntuali, ma solo le forze esercitate su di esse alla superficie che delimita V, e quindi avrò in media $\sum_{x_n \in V} \mathbf{x}_n \frac{d\mathbf{p}_n}{dt} = -p \int \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} = -p \int_V (\nabla \cdot \mathbf{x}) d^3x = -3pV$, c.d.d.

infiniti gradi di libertà, e ci si può aspettare che la lagrangeana sia l'integrale sullo spazio di una densità lagrangeana, $L = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{L}$; siccome le equazioni di Maxwell sono lineari, la densità lagrangeana da cui discendono sará quadratica, e per quanto detto deve essere invariante di Lorentz e gauge invariante. Non c'è molta scelta: si trova che le sole possibilità sono[16] :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -2F^{01}F^{01} - ... + 2F^{12} + 2... = -2\mathbf{E}^2 + 2\mathbf{B}^2 \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda} &= 8F_{01}F_{23} + 8F_{02}F_{31} + 8F_{03}F_{12} = 8\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \\ &= 4\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\lambda = 4\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}A_\nu\partial_\rho A_\lambda) \end{aligned} \tag{5.25}$$

Che $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ sia un invariante è interessante, ma è una 4-divergenza e non può contribuire all'azione. Con un po' di senno di poi prendo

$$\mathcal{A} = \int d(ct) \int d^3x\big(-\frac{1}{4c}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}J^\mu A_\mu\big) \tag{5.26}$$

con J^μ una corrente esterna tale che $\partial_\mu J^\mu = 0$ (altrimenti perdo l'invarianza di gauge). Se impongo che l'azione abbia variazione 0 quando $A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu$ ottengo le equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{A} &= \int d^4x\big(-\frac{1}{2c}F^{\mu\nu}(\partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu) + \frac{1}{c^2}J^\mu\delta A_\mu\big) = \\ &= \int d^4x\big(\frac{1}{c}\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2}J^\nu\big)\delta A_\nu \quad \to \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2}J^\nu \end{aligned} \tag{5.27}$$

(ho messo a zero l'integrale di una quadri-divergenza). Di qui in poi le cose si complicano, perché per poter calcolare l'evoluzione di A_μ occorre fissare un gauge, con complicazioni soprattutto in una teoria quantistica.

Più in generale, per descrivere le particelle elementari, è stata inventata una 'teoria dei campi classica', di cui i 'classici' nulla sapevano, fatta apposta per essere quantizzata sulla falsariga dell'elettrodinamica.

[Prendo qui $\hbar = c = 1$; resta una sola unità, per es. di lunghezza; massa energia, quantità di moto, e i campi A_μ, Φ hanno dimensione l^{-1}. L'azione è adimensionale].

Nel caso più semplice, il campo di Klein-Gordon è uno scalare (che qui prendo complesso) $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)) = |\Phi|e^{i\phi}$, con densità lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi^* - \mu^2\Phi\Phi^* - \lambda(\Phi\Phi^*)^2 =: K - V(|\Phi|) \tag{5.28}$$

[16] uso qui lo (pseudo)tensore di Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$, che è definito dall'essere completamente antisimmetrico e $\epsilon^{0123} = 1$; è uno pseudo tensore perché, dalla definizione di determinante, cambiando riferimento $\epsilon'^{\mu'\nu'\rho'\lambda'} = \Lambda^{\mu'}_{\ \mu}\Lambda^{\nu'}_{\ \nu}\Lambda^{\rho'}_{\ \rho}\Lambda^{\lambda'}_{\ \lambda}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} = \epsilon^{\mu'\nu'\rho'\lambda'}\det(\Lambda)$. Quindi ha le stesse componenti in ogni riferimento finchè $\det(\Lambda) = 1$

(termine cinetico - potenziale). Questa densità lagrangeana è chiaramente invariante per $\Phi(x) \rightarrow e^{i\Lambda}\Phi(x)$, oltre che per trf. di Lorentz. Perchè l'azione sia stazionaria rispetto a variazioni di Φ_1 e Φ_2 (o di Φ e Φ^*) il campo deve soddisfare l'equazione:

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\mu\Phi - \mu^2\Phi = 2\lambda\Phi^2\Phi^* \tag{5.29}$$

(di nuovo ho messo a zero una quadridivergenza). Se fosse $\lambda = 0$ questa equazione (di Klein-Gordon) avrebbe soluzioni di tipo onda piana con $k^\mu k_\mu = -\mu^2$, e posso convincermi che sto trattando onde-particelle con quadrimpulso $\hbar k^\mu$ e massa $\frac{\hbar\mu}{c}$. Se $\lambda \neq 0$ l'equazione diventa non-lineare, che interpreto come una auto-interazione del campo; se poi voglio che interagisca con il campo e.m., uso la versione relativistica della sostituzione minimale per scrivere la densità lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi(\partial_\nu - ieA_\nu)\Phi^* - \mu^2\Phi\Phi^* - \lambda(\Phi\Phi^*)^2 \tag{5.30}$$

La 'sostituzione minimale' ci garantisce l'invarianza di gauge, cioè invarianza per

$$A^\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x), \quad \Phi(x) \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\Phi(x), \quad \Phi^*(x) \rightarrow e^{-ie\Lambda(x)}\Phi^*(x)$$

e ci dà una teoria in cui il campo e.m. interagisce non più con una corrente preassegnata come nella (5.26), ma con campo in grado a sua volta di reagire; nel suo piccolo, una teoria dinamicamente completa.

Possiamo adesso riallacciarci alla teoria di Landau sulla transizione di fase al ferromagnetismo, e chiederci che succederebbe se ponessimo $\mu^2 < 0$. Il potenziale $V = \mu^2\Phi\Phi^* + \lambda(\Phi\Phi^*)^2$ avrebbe la forma di un sombrero, con il minimo per $\Phi = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}e^{i\phi} =: ae^{i\phi}$. Ridefinisco Φ a partire da un punto qualsiasi sulla falda del sombrero, per es. $\phi = 0$ ponendo

$$\Phi(x) = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)) \tag{5.31}$$

Avrei potuto prendere un valore di partenza diverso, $ae^{i\chi}$, sempre sulla falda del sombrero; la simmetria è 'spontanamente rotta', come nella transizione al ferromagnetirmo. Sostituendo la (5.31) nella densità lagrangeana (5.28) e ho:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_1)^2 - 2\lambda a^2\Phi_1^2 - \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\Phi_2)^2 - \sqrt{2}\lambda\Phi_1(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \tfrac{1}{4}\lambda(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 + cost. \tag{5.32}$$

questo è il 'modo Goldstone': invece che due scalari con la stessa massa ho uno scalare con massa e uno di massa 0! La presenza di uno scalare di massa 0 è diretta conseguenza della 'degenerazione del vuoto', cioè della piattezza della falda del sombrero.

Nel caso invece della (5.30), mi conviene riscrivere la (5.31) nella forma:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + \Phi'(x))e^{i\phi(x)}, \qquad \phi,\ \Phi' \text{ reali} \tag{5.33}$$

e prontamente osservare che posso riassorbire la fase $\phi(x)$ con una trasformazione di gauge con $\Lambda = -\frac{\phi}{e}$. Sostituendo nella (5.30) trovo, con un po' di algebra:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}e^2a^2A'_\mu A'^\mu - \tfrac{1}{2}\partial_\mu\Phi'\partial^\mu\Phi' - \tfrac{1}{2}\lambda a^2\Phi'^2 + ... \tag{5.34}$$

(ho evitato di scrivere i termini cubici e quartici). La teoria è ancora gauge-invariante, ma la trasformazione di gauge sarà più complicata. La scelta di eliminare ϕ con una trf. di gauge l'ha messa in quello che si chiama il 'gauge unitario', che mette in bella evidenza il suo contenuto: il fotone ha acquistato massa (e quindi 3 gradi di libertà, e on più 2 come in elettrodinamica), e ho un solo scalare, il 'bosone di Higgs'. Questo è appunto il modo Higgs. Notare come dalla massa del vettore non si può dedurre la massa dello scalare.

5.1 Il campo e.m. di una carica in movimento (potenziali di Liénard-Wiechert).

In questa sezione torniamo alle unità MKS; il quadripotenziale diventa $A^\mu = (\phi, c\mathbf{A})$. Suppongo che una carica puntiforme e si muova con una traiettoria preassegnata $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Uso la formula dei potenziali ritardati per ottenere, per es., l'espressione del potenziale e.m. $\phi(\mathbf{x}, t)$. Però vorrei iniziare con un argomento intuitivo, per chiarire che alla base delle formule che otterremo c'è un fatto cinematico elementare, che in se non ha nulla a che fare con la relatività, e che ritroveremo più oltre in un contesto diverso.

Consideriamo un oggetto lungo L che si muove verso destra con velocità v. I raggi emessi dalla coda dell'oggetto nella direzione di v arriveranno a un osservatore posto molto più a destra in un tempo t_c maggiore di quelli emessi dalla testa; ma quanto maggiore? <u>non</u> di $\frac{L}{c}$, perchè l'oggetto si muove, e in questo senso appare lungo $L' > L$. Sarà

$$c(t_c - t_t) = L + (L' - L) = L + v(t_c - t_t) \to L' = L + \frac{v}{c}L \to L' = \frac{L}{1 - \frac{v}{c}}$$

(aiutarsi con un disegno per apprezzare). Se i raggi formano un angolo θ con v, sarà $L' = \frac{L}{1 - \frac{v\cos\theta}{c}}$. Al contrario di quello che può sembrare, la relatività è irrilevante, L è la lunghezza dell'oggetto in movimento, e la simultaneità è nel riferimento solidale con l'oggetto; che risulta allungato di un fattore $\frac{1}{1 - \frac{v\cos\theta}{c}}$, lungo o corto che sia. Tenendone conto, dalla formula dei potenziali ritardati trovo:

$$4\pi\epsilon_0\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\bar{t})))d^3\mathbf{x}' = \frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})|}\frac{1}{1 - \frac{1}{c}\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})|}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{d\bar{t}}}\Bigg|_{\bar{t}=t-\frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})|}$$

Più formalmente, posso ragionare come segue [4]:

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\rho(t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')d^3\mathbf{x}' \\ &= \int \frac{e}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\bar{t}))\delta(\bar{t} - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)d^3\mathbf{x}'\, d\bar{t} = \\ &= \int \frac{e}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})|}\delta(\bar{t} - t + \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})|)d\bar{t}\end{aligned} \tag{5.35}$$

Ora in generale: $\delta(f(\bar{t}))d\bar{t} = \frac{1}{|f'(t')|}\delta(\bar{t}-t')d\bar{t}$, t' : $f(t')=0$, e:

$$\frac{d}{d\bar{t}}(\bar{t}-t+\frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})|) = 1 - \frac{1}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})|}(\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t}))\cdot\frac{d\mathbf{x}}{d\bar{t}}$$

che devo calcolare a un $\bar{t}$ tale che: $\bar{t} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})|$. Ottengo i 'potenziali di Liénard-Wiechert'[17]:

$$\begin{aligned}\phi(t,\mathbf{x}) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})| - \frac{1}{c}(\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t}))\cdot\frac{d\mathbf{x}}{d\bar{t}}}\Big|_{\bar{t}=t-\frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})|} \\ \mathbf{A}(t,\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\mathbf{v}(\bar{t})}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})| - \frac{1}{c}(\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t}))\cdot\frac{d\mathbf{x}}{d\bar{t}}}\Big|_{\bar{t}=t-\frac{1}{c}|\mathbf{x}-\mathbf{x}(\bar{t})|}\end{aligned} \tag{5.36}$$

Ho supposto che per ogni t la soluzione dell'equazione per $\bar{t}$ sia unica, che è ovvio se la particella è in moto uniforme, ma è vero in generale se $|\mathbf{v}| < c$; per lo stesso motivo il denominatore è sempre positivo.

Ancora un'altra 'derivazione' della (5.36), nel caso del moto uniforme, usando le trf. di Lorentz da un riferimento in cui la carica è in quiete in $x'_1 = (-ct', \mathbf{x}'_1)$ e la guardo da $x' = (0, \mathbf{x}')$, con $ct' = |\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1|$ (il quadrivettore $x'-x'_1$ è di tipo 'luce'). In questo riferimento il quadripotenziale sarà ragionevolmente: $A'^{\mu}(x') = (\phi', c\mathbf{A}') = (\frac{e}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1|}, \mathbf{0})$, ma tirando un po' a indovinare lo posso riscrivere, usando la quadrivelocità della particella $v'^{\mu} = (c, \mathbf{0})$, in termini di quadrivettori:

$$A'^{\mu}(x') = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{v'^{\mu}}{-v'\cdot(x'-x'_1)} \tag{5.37}$$

(perché $-v'\cdot(x'-x'_1) = c(ct') = c|\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1|$). Scritta così la formula è valida in generale, e passo al riferimento in cui la carica si muove con velocità $v^{\mu} = (\gamma c, \gamma\mathbf{v})$ e $(x-x_1)^{\mu} = (|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|, \mathbf{x}-\mathbf{x}_1)$. Avrò i potenziali:

$$\begin{aligned}A^{\mu}(x) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{v^{\mu}}{-v\cdot(x-x_1)}\Big| = \frac{e(c,\mathbf{v})}{4\pi\epsilon_0(c|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1| - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)} = \\ &= (\frac{e}{4\pi\epsilon_0}, c\frac{\mu_0}{4\pi}e\mathbf{v})\,\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1| - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)/c} = (\phi, c\mathbf{A})\end{aligned} \tag{5.38}$$

con $\mathbf{x}_1$ preso in modo che $c\Delta t = |\mathbf{x}-\mathbf{x}_1|$. La formula covariante può essere derivata più dignitosamente, e si può mostrare che la (5.37) vale in generale per ogni moto della

[17] Alfred-Marie Liénard (1869-1958) e Emil Wiechert (1861-1928), 1898. A.M. Liénard non va confuso con Philipp Lenard (1862-1947), Nobel 1905 per i suoi lavori sui raggi catodici e sull'effetto fotoeletrico; scoprì tra l'altro la dipendenza dalla frequenza dell'energia degli elettroni emessi. Diventò poi fervente nazista, e il principale oppositore delle teorie di Einstein (la teoria della relatività come frode ebraica, etc.), e fautore della 'fisica ariana'.

particella. Queste formule sono il punto di partenza per calcolare **E** e **B**; è un calcolo lungo, ma non realmente difficile. (cfr. [9], pg.70-75 che dettaglia [2]). Il risultato finale, che è quello che conta, è relativemente semplice, e lo useremo in tutto il resto di questo capitolo. Ponendo, per semplificare la notazione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t}) \ , \quad \beta = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{x}(\bar{t})}{d\bar{t}} \ , \ s = R - \beta \cdot \mathbf{R} \ , \quad \dot{\beta} = \frac{1}{c}\frac{d^2\mathbf{x}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} \ , \quad \bar{t} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})|$$

devo calcolare

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}(-\nabla\frac{1}{s} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\beta}{s}) \ ; \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \, e}{4\pi}\nabla \wedge \frac{\beta}{s} \tag{5.39}$$

Andando per gradi, comincio a ricavare le identità:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\bar{t}}{\partial t} &= 1 + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})|} \cdot \frac{d\mathbf{x}(\bar{t})}{d\bar{t}}\frac{\partial\bar{t}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\bar{t}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \beta \cdot \hat{\mathbf{R}}} = \frac{R}{s} \\
\frac{\partial\bar{t}}{\partial x} &= -\frac{1}{c}\frac{x - x(\bar{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})|} + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(\bar{t})|} \cdot \frac{d\mathbf{x}(\bar{t})}{d\bar{t}}\frac{\partial\bar{t}}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \nabla\bar{t} = -\frac{\mathbf{R}}{c\,s} \\
\frac{\partial|\mathbf{R}|}{\partial t} &= \frac{\partial|\mathbf{R}|}{\partial\bar{t}}\frac{\partial\bar{t}}{\partial t} = -c\frac{\mathbf{R}\cdot\beta}{|\mathbf{R}|}\frac{|\mathbf{R}|}{s} = -c\frac{\mathbf{R}\cdot\beta}{s} \\
\nabla|\mathbf{R}| &= \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} + c\frac{\mathbf{R}\cdot\beta}{|\mathbf{R}|}\frac{|\mathbf{R}|}{cs} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}(1 + c\frac{\mathbf{R}\cdot\beta}{cs})
\end{aligned} \tag{5.40}$$

etc.. Rimettendo poi a posto i pezzi, trovo in generale:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0(1 - \beta\cdot\hat{\mathbf{R}})^3}(\frac{(\hat{\mathbf{R}} - \beta)(1 - \beta^2)}{R^2} + \frac{\hat{\mathbf{R}} \wedge ((\hat{\mathbf{R}} - \beta) \wedge \dot{\beta})}{cR})\Big|_{ret} \\
\mathbf{B} &= \frac{1}{c}(\hat{\mathbf{R}} \wedge \mathbf{E})\Big|_{ret}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Queste espressioni sono ancora in parte implicite, perché tutto dipende da $\bar{t}$, ma sono il meglio che si può fare nel caso generale. Notare come nitidamente sono separati il pezzo 'stazionario', che va come $\frac{1}{R^2}$, dal pezzo radiativo, che va come $\frac{1}{R}$ e dipende da la accelerazione. Considerando solo quest'ultimo, il vettore di Poynting che è in generale

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{E^2}{Z_0}\hat{\mathbf{R}} \ . \tag{5.42}$$

può essere integrato su una grande sfera per calcolare la potenza totale emessa; questo calcolo è difficile e non ho neanche provato a riprodurlo; dà la formula di Liénard (1898):

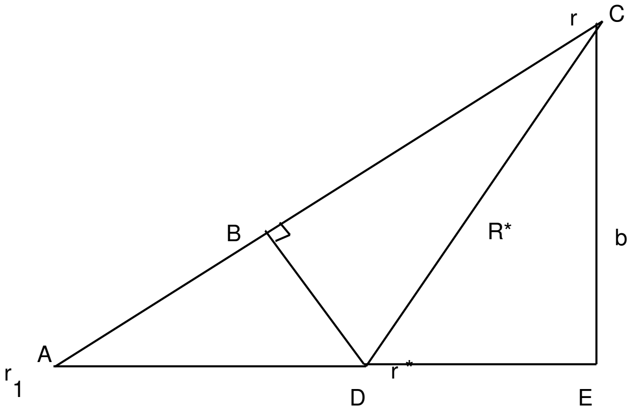
$$P_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{3c}\gamma^6(\dot{\beta}^2 - (\beta \wedge \dot{\beta})^2) \tag{5.43}$$

Adesso possiamo considerare in dettaglio vari casi particolari.

Particella carica in moto uniforme.

Questo caso è relativamente semplice e interessante, e consente una visualizzazione del pezzo non radiativo della(5.41) abbastanza intuitiva. Voglio calcolare i campi e.m. in $\mathbf{x}$ al tempo t (il punto C nel disegno), prodotti dalla carica quando stava in $\mathbf{x}_1$ al tempo t_1 (il punto A) ('adesso', cioè al tempo t, la carica sta in $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}(t - t_1)$, il punto D). Vedo che $\overline{AC} = |\mathbf{x}| = c(t - t_1)$, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{x}_*$. Chiamo

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1 \ ; \quad \mathbf{R}_* = \mathbf{x} - \mathbf{x}_* = \mathbf{R} - \mathbf{v}(t - t_1) \ ; \quad A^\mu = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}(1, \frac{\mathbf{v}}{c}) \frac{1}{|\mathbf{R}| - \frac{1}{c}\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}} \tag{5.44}$$



Siccome $\frac{1}{c}\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = \frac{|\mathbf{R}|}{c}\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t - t_1) = \overline{AB}$, si vede che il denominatore nella (5.44) $s := |\mathbf{R}| - \frac{1}{c}\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$ è la proiezione di $\mathbf{R}_*$ su $\mathbf{R}$ (cioè $\overline{BC}$); abbiamo poi $\overline{BD} = \overline{AD} \sin\alpha = |\hat{\mathbf{R}} \wedge \mathbf{v}(t - t_1)| = |\frac{1}{c(t-t_1)}\mathbf{R} \wedge \mathbf{v}(t - t_1)| = \frac{1}{c}|\mathbf{R}_* \wedge \mathbf{v}|$, e quindi con Pitagora $s = \sqrt{R_*^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{R}_* \wedge \mathbf{v})^2} = \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})R_*^2 + \frac{1}{c^2}(\mathbf{R}_* \cdot \mathbf{v})^2}$. Tutto può essere espresso in termini di $\mathbf{R}_*$, che fa' riferimento alla posizione 'presente' della carica. A dato t, se mi sposto cambia $\mathbf{x}$ ma non la posizione 'presente' della carica $\mathbf{x}_*$, quindi posso cambiare le derivate rispetto a $\mathbf{x}$ in derivate rispetto a $\mathbf{R}_*$, e calcolare

$$\nabla \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^3} \left((1 - \frac{v^2}{c^2})\mathbf{R}_* + \frac{1}{c^2}(\mathbf{R}_* \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \right)$$

D'altra parte, al tempo $t + dt$ i campi saranno in $\mathbf{x}$ quello che erano a t in $\mathbf{x} - \mathbf{v}dt$, e quindi

$$\frac{1}{dt}\big(A_\mu(t + dt, \mathbf{x}) - A_\mu(t, \mathbf{x})\big) = \frac{1}{dt}\big(A_\mu(t, \mathbf{x} - \mathbf{v}\,dt) - A_\mu(t, \mathbf{x})\big)$$

cioè $\frac{\partial}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla$. Mettendo tutto insieme

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0}(-\nabla + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla))\frac{1}{s} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_*}{(R_*^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{R}_* \wedge \mathbf{v})^2)^{3/2}}(1 - \frac{v^2}{c^2}) \\ \mathbf{B} &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2}\nabla\frac{1}{s} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \end{aligned} \tag{5.45}$$

E' sorprendente che $\mathbf{E}$ punti verso la posizione 'presente' della carica, non quella 'precedente' (ritardata). Ciò nonostante sappiamo che i campi che abbiamo determinato coincidono con quello che avremmo ottenuto dal campo di Coulomb con una trf. di Lorentz, e per $v << c$ ritroviamo le leggi di Coulomb e di Biot–Savart. Per $v \to c$ invece i campi somigliano a quelli prodotti da un breve impulso di onda piana. Per vederlo conviene riscrivere la (5.45) ponendo $\mathbf{R}_* = \mathbf{v}\tau + \mathbf{b}$, con τ definito in modo che a $\tau = 0$ la particella carica sta in E, a $\mathbf{b}$ dall'osservatore, $|\mathbf{b}|$ la minima distanza ('parametro d'impatto'); allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = 0$, e $\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(\mathbf{b}+\mathbf{v}\tau)}{(b^2+\gamma^2 v^2 \tau^2)^{3/2}}$; la componente trasversa di $\mathbf{E}$ (quella parallela a $\mathbf{b}$) avrà un picco $= \frac{e\gamma}{4\pi\epsilon_0 b^2}$ di durata $\Delta t \sim \frac{b}{\gamma v}$, quindi una larghezza di banda $\Delta\omega \sim \frac{\gamma v}{b}$. Questa osservazione (di Fermi) è alla base dell'approssimazione di Weizsäcker–Williams per mettere in relazione processi iniziati da fotoni con processi iniziati da elettroni di alta energia.

Radiazione da una particella carica accelerata.

Limite non-relativistico: Nel limite $|\beta| << 1$, $\gamma \simeq 1$ otteniamo:

$$\mathbf{E} \simeq \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \, c} \frac{\hat{\mathbf{R}} \wedge (\hat{\mathbf{R}} \wedge \dot{\beta})}{R}\Big|_{ret}, \quad \mathbf{\Pi} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4\pi c^3 R^2} (\dot{v}^2 - (\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2) \, \hat{\mathbf{R}}$$

La potenza irraggiata nell'angolo solido $d\Omega$ sarà $\frac{dP}{d\Omega} = R^2 |\mathbf{\Pi}|$, che integrata da' la potenza totale $P_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} e^2 \dot{v}^2$ ('formula di Larmor'), che è la formula del dipolo, riciclata. Confortante.

β **parallelo a** $\dot{\beta}$**.**

Questo è il caso, per es., di un acceleratore lineare, o di un tubo per raggi X. La (5.43) si semplifica, e nel caso relativistico differisce dal caso precedente per il fattore $(1 - \beta \cdot \hat{\mathbf{R}})^{-3}$, che dà un marcato picco in avanti.

Per un acceleratore, interessa il rapporto tra l'energia emessa e quella che viene ceduta alle particelle dai campi che le accelerano; $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = mc^2 \gamma^3 \beta \dot{\beta}$, quindi:

$$\frac{P_{tot}}{\frac{d\mathcal{E}}{dt}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} \frac{2}{3c} \frac{\gamma^3 \dot{\beta}}{\beta} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2}\right) \frac{2}{3} \frac{\frac{d\mathcal{E}}{dx}}{mc^2} = \frac{2}{3} r_e \frac{\frac{d\mathcal{E}}{dx}}{mc^2} \tag{5.46}$$

Dove $r_e \sim 3 \cdot 10^{-15}$m è il raggio classico dell'elettrone. Con i campi acceleratori che si riescono a realizzare la perdita di energia non sarà mai significativa. Ciò nonostante, ricaviamo la distribuzione angolare e un'espressione approssimata dello spettro di potenza, perché è più facile che nel caso successivo. Per calcolare l'energia persa dalla carica in un angolo solido $d\Omega$ nell'intervallo di tempo $d\bar{t}$ calcolo il vettore di Poynting volte R^2, e moltiplico per $\frac{\partial t}{\partial \bar{t}}$ (perché $|\mathbf{\Pi}|$ è l'energia ricevuta per m^2 per dt; per una spiegazione più articolata cfr.[5] §20-2); usando le (5.40)(5.41)(5.42) trovo:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \Pi \cdot \hat{\mathbf{R}} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5} \tag{5.47}$$

Per $\beta << 1$ ritroviamo il $\sin^2\theta$ della radiazione di dipolo. Però il fattore relativistico $1/(1-\beta\cos\theta)^5$ diventa cruciale per $\beta \sim 1$ perché allora $\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} + ..$ e $1 - \beta\cos\theta \simeq \frac{1+\gamma^2\theta^2}{2\gamma^2}$. La radiazione viene emessa in un cono con $\theta \simeq \frac{1}{\gamma} = \frac{mc^2}{\mathcal{E}}$ (più precisamente, l'emissione è massima per $\theta \simeq \frac{1}{2\gamma}$).

Con le stesse equazioni si possono fare stime approssimate dell'energia emessa quando una particella carica viene frenata nella materia (bremsstrahlung), per es. in un tubo per raggi X e in ogni eperimento di alta energia. Si trova ([2], cap.15) che a energie non relativistiche la perdita di energia per irraggiamento è trascurabile rispetto a quella dovuta agli urti. A energie relativistiche le perdita radiative sono invece dominanti, e si trova che

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{\mathcal{E}}{X_0\rho} \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-x/X_0\rho}$$

con ρ la densità di massa, X_0='lunghezza di radiazione'; per elettroni $X_0 \simeq 32\ g/cm^2$ di aria, 19 g/cm^2 di alluminio (7.2 cm), 4.4 g/cm^2 di piombo (0.39 cm).

[errori da correggere nel paragrafo precedente]

Per ricavare lo distribuzione in frequenza della radiazione emessa [5](ignorando rigore, sottigliezze e supponendo $\beta << 1$), cominciamo col porre, per $E(t)$ reale:

$$E(t) = \int E_\omega e^{-i\omega t} d\omega = \int E^*_\omega e^{i\omega t} d\omega, \; E_\omega = E^*_{-\omega} \;\; \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = 4\pi \int_0^\infty |E_\omega|^2 d\omega$$

Supponiamo poi che l'urto frenante sia istantaneo $\dot{\beta} \simeq \delta(t-t_0)\Delta\beta$ (un'ipotesi chiaramente poco plausibile, ma un punto di partenza). Allora

$$E(t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 cR} \hat{\mathbf{R}} \wedge (\hat{\mathbf{R}} \wedge \Delta\beta)\, \delta(t-t_0) \quad , \quad E_\omega = \frac{e}{8\pi^2\epsilon_0 cR} \hat{\mathbf{R}} \wedge (\hat{\mathbf{R}} \wedge \Delta\beta)\, e^{i\omega t_0}$$

Integrando sugli angoli ottengo

$$P_\omega d\omega = \frac{4\pi}{Z_0} d\omega \int_S |E_\omega|^2 dS = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 c} (\Delta\beta)^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

i.e. uno spettro uniforme (e un'energia totale infinita!). A bassa frequenza però è plausibile che lo spettro sia davvero uniforme, e tagliato a una frequenza tale che $h\nu \simeq \frac{1}{2}mv^2$. In termini di fotoni questo implica che

$$dN_\omega = \frac{P_\omega\, d\omega}{\hbar\omega} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \frac{2}{3\pi} (\Delta\beta)^2 \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{137} \frac{2}{3\pi} (\Delta\beta)^2 \frac{d\omega}{\omega}$$

il numero di fotoni di bassa energia emessi è infinito, anche se l'energia totale è finita. Questa è quella che in elettrodinamica quantistica si chiama la 'divergenza infrarossa', che viene curata proprio facendo riferimento al risultato classico.

β **perpendicolare a** $\dot{\beta}$

Questo è quello che tipicamente accade per un elettrone deflesso da un campo magnetico uniforme in un macchina acceleratrice circolare. Siccome $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma c\dot{\beta}$, dalla (5.43):

$$P_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\gamma^4\dot{\beta}^2 = \frac{2}{3}r_e\frac{\gamma^2}{mc}(\frac{d\mathbf{p}}{dt})^2 \tag{5.48}$$

Questa emissione è significativa e importante, e forma la cosiddetta 'luce di sincrotrone'; sono state costruite macchine acceleratrici per elettroni dedicate principalmente alla produzione di luce di sincrotrone per l'analisi delle strutture di materiali organici e inorganici, tra queste 'Elettra' a Trieste (www.elettra.trieste.it), e la European Sinchrotron Radiation Facility a Grenoble (www.esrf.fr; vale la pena di visitare questo sito per rendersi conto del varietà di ricerche in corso). Ma notiamo subito che nel limite relativistico $\dot{\beta} = \frac{v^2}{cR} \simeq \frac{c}{R}$, e

$$P_{tot} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{3}\frac{e^2c}{R^2}(\frac{\mathcal{E}}{mc^2})^4$$

a parità di energia e di raggio dell'orbita un elettrone perde $(1836)^4$ volte più energia di un protone; è chiaro che questo fattore γ^4 è cruciale nella scelta delle macchine acceleratraci da costruire. Per un elettrone di energia $\mathcal{E} = m\gamma c^2$ mantenuto su un orbita circolare di raggio R da un campo magnetico uniforme, $|\frac{d\mathbf{p}}{dt}| = m\gamma\frac{v^2}{R} = evB$, e l'energia emessa (quindi, persa) per orbita sarà:

$$P_{tot}T = \frac{4\pi}{3}\frac{r_e}{R}\gamma^3\beta^3\mathcal{E} \tag{5.49}$$

Oppure, se la corrente totale che circola nella macchina è $I = \frac{Ne}{T}$, il 'consumo' totale di energia sarà:

$$P(\text{Watt}) = (P_{tot}T)\,N\,\frac{1}{T} = \frac{P_{tot}T}{e}\,I = (P_{tot}T)(eV)\,\times\,I(Amp)$$

Nel sito di cui sopra si dice che Elettra usa elettroni di 2 GeV, in un anello di circonferenza $2\pi R \simeq 259.2$ m. Se il campo magnetico fosse uniforme la perdita di energia per giro sarebbe

$$P_{tot}T \simeq \frac{4\pi}{3}\frac{3.\ 10^{-15}}{41.}(\frac{2.\ 10^3}{0.5})^3 2.\ 10^9\ \text{eV} \simeq 39.\ \text{keV}$$

In realtà 256 keV, perché il campo magnetico è formato da 12 magneti da 1.2 T ciascuno, che danno un raggio di curvatura $R' = \frac{\mathcal{E}v}{eBc^2} \simeq 5.6\ m$; mi sembra di capire che la corrente totale varia tra 100 e 320 mA, che darebbe un consumo totale tra i 25 e i 75 kW.

La distribuzione angolare della radiazione è relativamente complicata; se prendo l'asse x nella direzione di $\dot{\beta}$, l'asse z nella direzione di β, lo stesso ragionamento usato per derivare la (5.47) mi dà:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{4\pi c^3}\dot{v}^2\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2})$$

si trova di nuovo che per particelle relativistiche ($\beta \approx 1$) la radiazione emessa sta tutta in un cono con asse nella direzione della velocità e apertura $\theta \simeq \frac{1}{\gamma}$; se l'orbita è circolare la carica irradierà verso un osservatore piazzato nel piano $\beta - \dot{\beta}$ per un tempo $\Delta t \simeq \frac{\theta}{\omega} = \frac{R}{\gamma v}$, come un faro.

Più che a un faro, l'emissione somiglia a certi spruzzatori da giardino, e questo fà una differenza importante per un effetto di cinematica elementare (in sostanza, lo stesso che abbaimo visto all'inizio di questa sezione). L'onda si allontana formando come una spirale. Nella direzione dell'osservatore dopo un tempo t dal passaggio della carica ci sarà un'onda che ha un fronte a distanza ct e un retro a $c(t-\Delta t)+v\Delta t$, e quindi è lunga $L=(c-v)\Delta t$ e durata $\overline{\Delta t} = \frac{L}{c} = (1-\beta)\Delta t = \frac{1-\beta^2}{1+\beta}\frac{R}{\gamma v} \approx \frac{R}{2c\gamma^3}$ (<u>molto più breve</u> di Δt). L'impulso che vedrà l'osservatore avrà componenti in frequenza fino a $\omega_{max} \simeq (\overline{\Delta t})^{-1} = \frac{2c\gamma^3}{R}$ (e qui si vede la cruciale importanza del fattore γ^2 appena ricavato). Per Elettra questo darebbe fotoni con:

$$\lambda_{min} \simeq \frac{\pi R'}{\gamma^3} \simeq 2.7\ 10^{-10}\ m \quad , \quad \mathcal{E}_{max} \simeq \frac{2\hbar c}{R'}\gamma^3 \simeq \frac{2\cdot 197.2\ 10^6}{5.6\ 10^{15}}(\frac{2\ 10^3}{0.5})^3 \simeq 4500.\ eV$$

in realtà 3.2 keV. Questa stima naturalmente è grossolana; la forma dello spettro di potenza, che naturalmente è importante nelle applicazioni, viene ricavata nei testi citati con un calcolo complicato. Nella realtà, ancora più complicato di quanto i testi non dicano, perché per es. a Grenoble molti dei fasci sono ottenuti con magneti speciali che si chiamano 'wigglers' e 'undulators', una sequenza di magneti con polarità alternate.

6. Cenni sulla teoria dei Laser.

Il laser è una delle grandi invenzioni del XX secolo, e la fisica dei laser è diventata un intero campo della fisica, con interi scaffali di libri anche nella nostra biblioteca, per es. [12], [13], [14]. Questi sono pochi cenni introduttivi.

Abbiamo visto che in una cavità di volume V con pareti perfettamente conducenti ci sono $\frac{8\pi\nu^2 L^3\,\Delta\nu}{c^3}$ modi possibili per il campo elettromagnetico con frequenze tra ν e $\nu+\Delta\nu$.

Se supponiamo che la radiazione sia in equilibrio termico con la cavità, possiamo supporre in prima istanza che a ciascun modo vada un k_BT di energia; otteniamo allora per la radiazione la densità spettrale di Rayleigh-Jeans

$$\rho_{RJ}(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT \qquad (\frac{Joule}{m^3\,Hertz}) \tag{6.1}$$

che va bene per ν 'piccole'; ma quanto piccole? nella teoria classica manca un termine di raffronto, e comunque la (6.1) integrata in $d\nu$ darebbe un densità di energia infinita.

Se invece supponiamo con Planck che i modi abbiano energia $n\hbar\omega$, allora è chiaro che i modi con $\hbar\omega >> k_B T$ saranno svantaggiati; la ρ avrà un massimo per $\hbar\omega \sim k_B T$ e poi calerà; ciascun modo avrà in media energia $\overline{n}\,\hbar\omega$, con (ponendo $\alpha = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$):

$$\overline{n} = \frac{\sum_n n e^{-\alpha n}}{\sum_n e^{-\alpha n}} = \frac{-\frac{d}{d\alpha}\sum_n e^{-\alpha n}}{\sum_n e^{-\alpha n}} = -\frac{d}{d\alpha}\log\sum_n e^{-\alpha n} = -\frac{d}{d\alpha}\log\frac{1}{1-e^{-\alpha}} = \frac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} \ ,$$

e notare che $\overline{n}\,\hbar\omega < k_B T$ per ogni ω e T. Otteniamo quindi la densità spettrale di Planck:

$$\rho_{Planck}(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}} \tag{6.2}$$

che è in splendido accordo con gli esperimenti; ha un massimo per $h\nu \simeq 2.8 k_B T$, e integrata in $d\nu$ dà $\rho_{\mathcal{E}}(T) = aT^4$, con $a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3} = 4\sigma/c$, $\sigma = 5.67\ 10^{-8}$ W/m^{2}K^4, la costante di Stefan-Boltzmann. [Se facciamo un buco nella cavità, l'energia/(secondo-m^2-Hz) che esce sarà

$$I(\nu, T) = \frac{c}{2}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\rho_{Planck}(\nu, T) = \frac{c}{4}\rho_{Planck}(\nu, T)\ .$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ è dovuto all'idea che le onde stazionarie vanno metà a destra metà a sinistra; l'integrale è su metà emisfero (detto così questo ragionamento non mi sembra molto convincente; preso da K. Huang, Statistical Mechanics, cfr. anche Mandl, Statistical Physics). Integrando sulle frequenze otteniamo la legge di Stefan Boltzmann $I(T) = \sigma T^4$].

E' notevole che nel ragionamento precedente (essenzialmente quello di Planck) la 'materia' non gioca nessun ruolo; volutamente, la $\rho(\nu, T)$ deve essere universale. Una riderivazione o una rimeditazione della legge di Planck da parte di Einstein, tenendo conto delle ipotesi di Bohr, pubblicata nel 1917, procede così. (cfr. la bella biografia di Einstein scritta da A. Pais, 'Sottile è il Signore', cap. 21). Consideriamo un sistema formato da molecole di gas che interagiscono con la radiazione elettromagnetica, in equilibrio termico. Se $\mathcal{E}_n$ sono i livelli energetici delle molecole (supponiamoli non degeneri per semplificarci la vita), e $\rho(\nu, T)$ la densità spettrale della radiazione, consideriamo due livelli 1, 2 con $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = h\nu_{21}$. Dalla legge di Boltzmann all'equilibrio avremo

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(\mathcal{E}_2-\mathcal{E}_1)/k_B T} \tag{6.3}$$

Le molecole in 1 possono assorbire radiazione e transire a 2, e ragionevolmente

$$dN_{1\to 2} = B\rho(\nu_{21}, T)N_1 dt \tag{6.4}$$

La costante B dipende dall'elemento di matrice del dipolo elettrico tra 2 e 1, ma questo sarà scoperto molti anni dopo. Nella transizione opposta dobbiamo tenere conto della 'emissione spontanea' e della 'emissione stimolata', e avremo:

$$dN_{2\to 1} = B\rho(\nu_{21}, T)N_2 dt + AN_2 dt \tag{6.5}$$

Si suppone che la stessa costante B compaia per via della microreversibilità. Il coefficiente A d'altra parte è nuovo di zecca, e per calcolarlo ci vorrebbe l'elettrodinamica quantistica. Ma all'equilibrio $dN_{2\to 1} = dN_{1\to 2}$, e quindi, mettendo insieme le tre precedenti equazioni

$$B\rho(\nu_{21}, T)N_2 + AN_2 = B\rho(\nu_{21}, T)N_1 \;\to\; \rho(\nu_{21}, T) = \frac{A/B}{e^{h\nu_{21}/k_B T} - 1} \tag{6.6}$$

Imponendo che per $h\nu_{21} << k_B T$ valga la Rayleigh-Jeans ottengo

$$A = \frac{8\pi h\nu_{21}^3}{c^3} B \tag{6.7}$$

Se invece avessi ignorato l'emissione stimolata nella (6.5), avrei ottenuto la densità spettrale di Wien

$$\rho(\nu, T)_W = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \tag{6.8}$$

che è un'ottima approssimazione alla legge di Planck per $h\nu >> k_B T$.

Tutto questo vale all'equilibrio, ma le costanti A e B mantengono il loro significato anche se altero le condizioni di equilibrio, i.e. la (6.3). Sono state inventati vari modi per aumentare N_2, per es. il 'pompaggio ottico' di Kastler, e allora l'emissione stimolata mi da' la possibilità di amplificare un segnale di frequenza ν_{21} ('maser'); oppure, inserendo degli specchi nella cavità, di ottenere oscillazioni sostenute ('laser').

Oscillazioni sostenute.

L'idea generale su come ottenre un oscillatore da un amplificatore usando la controreazione, cioè passando all'input una parte del segnale amplificato, è uno dei temi generali dell'elettronica, Accludo come appendice quattro pagine di una vecchia dispensa sull'argomento; ignorare i riferimenti ai programmi Fortran.

L'approccio più semplice alla teoria del Laser ̀basato su 'rate equations', simili in spirito al ragionamento di Einstein. Per dare un'idea, nel caso più sempile possibile (cfr. [12] , cap.2), considero un sistema di molecole con due livell 1 e 2, $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, e densità di fotoni di energia $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ data da n. Nonostante il cambiamento di notazione, il ragionamento precedente dovrebbe rendere chiare le sequenti equazioni fenomenologiche:

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= (N_2 - N_1)Bn - 2\kappa n \\
\frac{dN_2}{dt} &= w_{21}N_1 - w_{12}N_2 - (N_2 - N_1)Bn \\
\frac{dN_1}{dt} &= w_{12}N_2 - w_{21}N_1 + (N_2 - N_1)Bn
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Nella prima, ho ignorato l'emissione spontanea ma incluso il termine $-2\kappa n$ che rappresenta la perdita di fotoni per assorbimento dalle pareti e simili. Nelle altre due, i termini proporzionali a w_{21}, w_{12} hanno a che fare con il pompaggio e con le transizioni senza emissione di fotoni (urti anelastici etc.). Queste equazioni sono abbastanza ingenue, e ignorano innumerevoli complicazioni: il pompaggio non è di solito tra 1 e 2 ma coinvolge almeno un altro livello, e così via. Definisco:

$$N := N_1 + N_2 \ ; \quad D := N_2 - N_1 = '\text{inversione}' \ , \quad D_0 := N\frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}} \ , \quad \frac{1}{T} = w_{21} + w_{12}$$

e ottengo dalle precedenti che $N = \text{cost.}$, e

$$\frac{dD}{dt} + \frac{1}{T}D = \frac{1}{T}D_0 - 2BDn \quad ; \quad \frac{dn}{dt} + 2\kappa n = DBn \tag{6.10}$$

che si capiscono abbastanza bene. In condizioni stazionarie le derivate sono nulle, e dall'algebra si direbbe che $D = \frac{D_0}{1+2BnT} = \frac{2\kappa}{B}$, $n = \frac{D_0B-2\kappa}{4\kappa BT}$; ma deve essere $n \geq 0$ e quindi questo vale solo se $D_0B > 2\kappa$, altrimenti $n = 0$, $D = D_0$. C'è cioè, come in tutti gli oscillatori, una condizione di innesco per la pompa, al di sotto della quale il laser non parte. Se supponiamo $|\dot{D}| << \frac{|D_0-D|}{T}$, $D = \frac{D_0}{1+2BnT} \simeq D_0 - 2D_0TBn$ e l'equazione per n diventa

$$\frac{dn}{dt} + (2\kappa - D_0B)n \simeq -2D_0TB^2n^2$$

che possiamo risolvere separando le variabili:

$$n = \frac{n_0(2\kappa - D_0B)e^{-(2\kappa - D_0B)t}}{(2\kappa - D_0B) + 2D_0TB^2n_0(1 - e^{-(2\kappa - D_0B)t})}$$

al di sotto della condizione di innesco n rilassa a 0, al di sopra al valore stazionario (approssimativamente).

Il livello successivo di teoria è la 'teoria semiclassica' del Laser, ed è un po' più raffinato; in particolare, mette in luce gli aspetti di coerenza della luce Laser che sfugge alle rate equations.

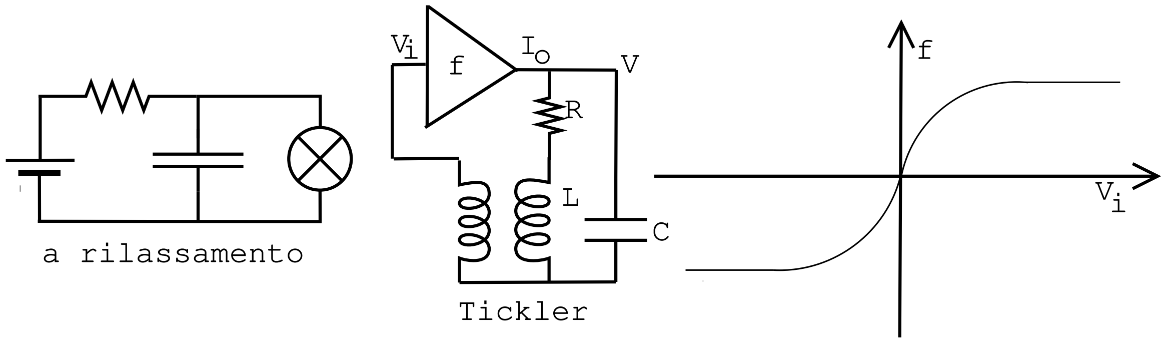
Appendice.

2.4 Oscillazioni sostenute.

[per questa sezione ho attinto al monumentale libro di Andronov [15], oltre agli altri testi citati]. Per "oscillatore", nel linguaggio comune, si intende qualcosa che <u>genera</u> oscillazioni di una data frequenza, e quindi qualche altro ingrediente è necessario. Nel seguito do qualche cenno sulla teoria, in buona parte a livello intuitivo, invertendo l'ordine tradizionale di presentazione e ponendo l'enfasi sul ruolo che gioca in questi dispositivi la non linearità.

Un esempio di quello che vengono chiamati “oscillatori a rilassamento” è mostrato in figura: qui un tubo a gas produce una scarica quando il potenziale tra i suoi eletrodi supera una certa soglia V_s; trascurando il tempo di scarica il periodo sarà $T = RC \ln \frac{V_0}{V_0 - V_s}$. Innumerevoli fenomeni periodici hanno un'origine analoga.

Ci concentreremo invece maggiormente sul caso dei 'feedback oscillators' (oscillatori a controreazione). Un esempio non canonico, ma che tutti conosciamo, è un amplificatore audio il cui microfono viene messo vicino all'altoparlante: ci si può ben chiedere che cosa determina la frequenza e il volume del poderoso fischio che immancabilmente segue. Pensandoci, ci si rende rapidamente conto che se l'amplificatore in questione fosse veramente lineare, esploderebbe. Ma naturalmente ogni amplificatore arriva a saturazione. Un esempio, sia pur idealizzato, dovrebbe chiarire la situazione. (l'esempio è tratto da [16], che lo ha tratto da Andronov[15])



Nel dispositivo indicato molto schematicamente in figura, che si chiama oscillatore di Tickler, il triangolo rappresenta un amplificatore che eroga una corrente $I_o = f(V_i)$, con f una funzione del tipo indicato nel grafico: ha una regione lineare intorno a $V_i = 0$ e poi va in saturazione simmetricamente; il trasformatore è avvolto in modo che all'ingresso dell'amplificatore compare una tensione $M\frac{dI_L}{dt}$, $M > 0$. Qualunque sia la funzione f, l'analisi del circuito è semplice:

$$V = \frac{Q}{C} = RI_L + L\frac{dI_L}{dt} \quad , \quad I_o = f(M\frac{dI_L}{dt}) = I_L + \frac{dQ}{dt} = I_L + CR\frac{dI_L}{dt} + CL\frac{d^2I_L}{dt^2}$$

$$\rightarrow \quad f(M\frac{dI_L}{dt}) = I_L + CR\frac{dI_L}{dt} + CL\frac{d^2I_L}{dt^2}$$

Questa equazione non è in generale risolubile analiticamente, ma è facile analizzarne le soluzioni nel caso limite di un amplicatore <u>molto</u> non lineare, in cui la regione lineare è contratta a zero. Opportunamente normalizzata l'equazione diventa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \epsilon(\frac{dx}{dt})\omega^2 a \tag{6.11}$$

(la funzione $\epsilon(y) = 1$ se $y > 0$, $\epsilon(y) = -1$ se $y < 0$) e supponiamo $\omega > \delta$. Nel piano $(x, \frac{dx}{dt})$ l'accelerazione sarà come indicata dalle frecce nel grafico, che indica anche le traiettorie che otteniamo dalla supponendo $\eta > 0$ 'piccolo a piacere':

$$t = 0: \; (x = x_0 > a, \; \frac{dx}{dt} = -\eta) \quad \rightarrow \quad x(t) = -a + (x_0 + a)\mathbb{R}(1 - i\frac{\delta}{\omega})e^{-\delta t + i\omega t}$$
$$t = 0: \; (x = x_0 < -a, \; \frac{dx}{dt} = \eta) \quad \rightarrow \quad x(t) = a + (x_0 - a)\mathbb{R}(1 - i\frac{\delta}{\omega})e^{-\delta t + i\omega t}$$

Quindi se il sistema parte da $(x_0 > a, \; \frac{dx}{dt} = -\eta)$, in un tempo $\frac{\pi}{\omega}$ compie un mezzo giro e arriva a $(x = -a - e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}}(x_0 + a), \frac{dx}{dt} = -\eta)$; passa senza difficoltà a $(x = -a - e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}}(x_0 + a), \frac{dx}{dt} = +\eta)$ e dopo un altro mezzo giro ritorna sull'asse positivo delle x. Avremo la mappa di Poincaré (in figura, accanto al circuito):

$$x_0 \; \rightarrow \; x_0' = e^{-\frac{2\delta\pi}{\omega}} x_0 + (1 + e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}})^2 a$$

[Per le mappe di Poincaré, cfr. http://math.bu.edu/DYSYS/applets/linear-web.html]

Il punto fisso della mappa $x_0 = x_0'$ sarà in

$$\overline{x} = a\frac{1 + e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}}}$$

e corrisponde a un'orbita stabile del sistema, un "ciclo limite" che viene raggiunto da qualunque condizione iniziale. Se il ciclo limite fosse veramente un'ellisse avremmo generato una pura oscillazione sinusoidale; avremo invece abbondanti armoniche.

Il comportamento di questo oscillatore può essere 'visto' con il programma andro.f. Come nei precedenti, i parametri sono stati scelti a naso; si può sperimentare a volontà. Notare che il programma di soluzione numerica non ama le funzioni discontinue; quindi ho fatto in modo di aiutare il destino a $\frac{dx}{dt} = 0$, risolvendo l'equazione mezzo ciclo alla volta, e cambiando a mano il segno di $\frac{dx}{dt}$ quando è circa zero.

Capito il caso limite, possiamo provare con un amplificatore che abbia un comportamento meno estremo, ma con le stesse proprietà di saturazione. Ho provato a sostituire la (6.11) con:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \omega^2 a \tanh(\gamma\frac{dx}{dt}) \tag{6.12}$$

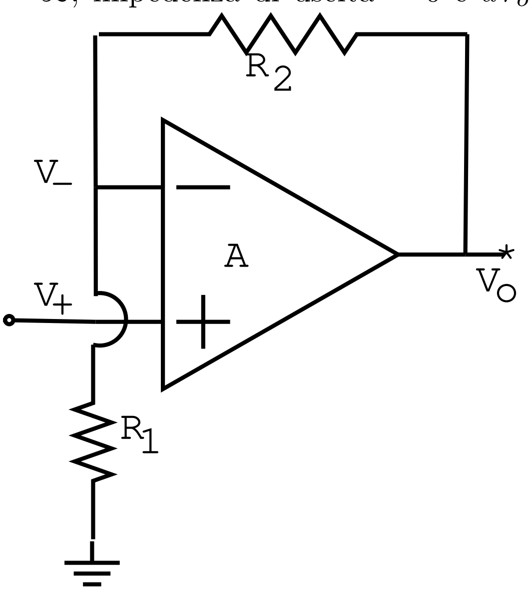
che non è molto plausibile per un circuito elettronico, ma è facile da simulare con il calcolatore. Ora è fisicamente intuitivo che se γ è molto grande ritorniamo al caso limite precedente, mentre se è molto piccolo l'amplificatore non amplifica abbastanza per far decollare l'oscillazione sostenuta e vince il termine dissipativo. Perché il sistema sia attratto al ciclo limite è necessario che

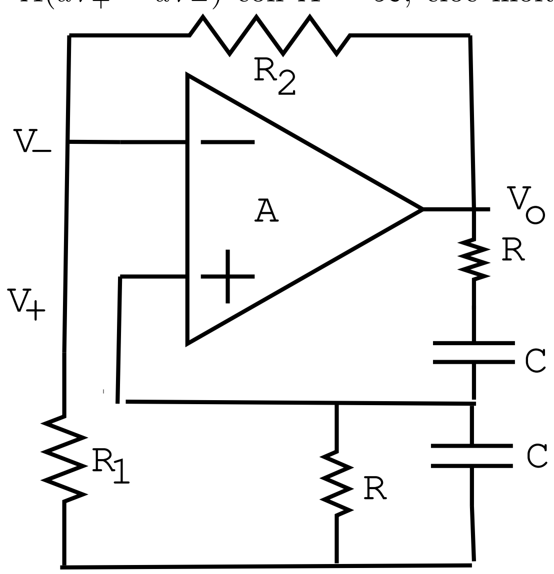
$$2\delta < \omega^2 a f'(\gamma\frac{dx}{dt})\Big|_0 = \omega^2 a\gamma \tag{6.13}$$

dimostrata in [16], pg. . Si può invece sperimentare con il programma andro2.f, e convincersi che quello che ci si aspetta intuitivamente effettivamente succede. Naturalmente sarebbe ancora meglio sperimentare con un vero circuito, che credo potrebbe essere facilmente realizzato con un FET; non ne so molto.

Tutto ciò posto, va detto che questo abbozzo di teoria non somiglia molto a quello che si trova nei libri di elettronica, dove viene sviluppata la teoria generale degli amplificatori con feedback, e quindi degli oscillatori; una teoria complessa, a cui posso solo accennare. L'enfasi è tutta sulla regione lineare dell'amplificatore; come nella teoria dei circuiti in corrente alternata, le equazioni differenziali non vengono scritte affatto.

Noi abbiamo considerato un dispositivo che genera una corrente funzione di una tensione di ingresso. Invece il dispositivo tipo, che viene chiamato 'amplificatore operazionale' e rappresentato come in figura, ha (opportunamente idealizzato) in $\pm$ impedenze di ingresso $\sim \infty$, impedenza di uscita ~ 0 e $dV_o = A(dV_+ - dV_-)$ con $A \sim \infty$, cioè molto grande.





Un primo esempio: con il collegamento indicato in figura, che è tipico, abbiamo: $dV_o = A(dV_+ - dV_o \frac{R_1}{R_1+R_2}) \simeq \frac{R_1+R_2}{R_1} dV_+$; In questo caso la feedback è usata per ottenere l'amplificazione di un segnale in ingresso di un fattore $\sim \frac{R_1+R_2}{R_1}$ fissato da componenti esterni all'amplificatore stesso. I dettagli sono più complicati nella pratica (ma non molto): dobbiamo organizzare l'alimentazione dell'amplificatore e fare in modo che vada in saturazione simmetricamente quando il segnale in ingresso supera un certo livello.

Il fattore di amplificazione può dipendere dalla frequenza del segnale, oppure capacità e/o induttanze possono essere poste nel circuito di feedback, e allora l'analisi si complica. Consideriamo per esempio il circuito in figura, che si chiama 'oscillatore di Wien'. Possiamo analizzarlo come segue: indicando con Q, Q' le cariche dei condensatori in alto e in basso, avremo:

$$V_- = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_o \ , \quad V_o - V_+ = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \ , \quad V_+ = \frac{Q'}{C} = R(\frac{dQ}{dt} - \frac{dQ'}{dt})$$

$$\to R\frac{dQ}{dt} = R\frac{dQ'}{dt} + \frac{Q'}{C} \ , \ V_o - \frac{Q'}{C} = \frac{Q'}{C} + R\frac{dQ'}{dt} + \frac{Q}{C} \ \to \ V_o = 2\frac{Q'}{C} + R\frac{dQ'}{dt} + \frac{Q}{C}$$

ora deriviamo per eliminare $\frac{Q}{C}$, e usiamo la proprietá dell'amplificatore:

$$\frac{dV_o}{dt} = \frac{3}{C}\frac{dQ'}{dt} + R\frac{d^2Q'}{dt^2} + \frac{Q'}{RC^2} = A(\frac{dV_+}{dt} - \frac{dV_-}{dt}) = A(\frac{1}{C}\frac{dQ'}{dt} - \frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{dV_o}{dt})$$

eliminiamo $\frac{dV_o}{dt}$ mettendo insieme un'equazione in cui compare solo Q'

$$\frac{d^2Q'}{dt^2} + \frac{1}{CR}\left(3 - \frac{A}{1 + A\frac{R_1}{R_1+R_2}}\right)\frac{dQ'}{dt} + \frac{1}{C^2R^2}Q' = 0$$

E' chiaro allora che il circuito oscillerà a $\omega = \frac{1}{RC}$ se scegliamo R_1, R_2 in modo che il fattore di amplificazione sia pari a 3 (quindi, nel limite $A \sim \infty$, $R_2 = 2R_1$); se il rapporto di amplificazione è > 3 l'equazione che abbiamo ricavato diventa instabile, e dovremmo tener conto delle nonlinearità, cioè del comportamento dell'amplificatore quando va in saturazione, come nel precedente esempio (il cui merito era di permettere un'analisi esplicita).

In elettronica l'analisi è molto più spiccia. Trattando il circuito come una rete in alternata, si osserva che la frazione di output passata all'input '+' è:

$$\widetilde{T}(\omega) = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R}+i\omega C}}{\frac{1}{\frac{1}{R}+i\omega C} + R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{\frac{R}{1+i\omega RC}}{\frac{R}{1+i\omega RC} + \frac{1+i\omega RC}{i\omega C}} = \frac{R}{R + \frac{(1+i\omega RC)^2}{i\omega C}}$$

Questa frazione è <u>reale</u> e pari a 1/3 quando $\omega = \frac{1}{RC}$; il circuito quindi oscillerà con questa ω se organizziamo l'amplificatore in modo che amplifichi di un fattore 3; per buona misura (cioè, per assicurarsi che l'oscillatore decolli) si prende un rapporto di amplificazione > 3. Questo ragionamento viene passato come un'applicazione del 'criterio di Nyquist' (impropriamente, l'analisi di Nyquist è molto più sofisticata, cfr. per es.[10]).

In [10]c'è uno schema di oscillatore di Wien che dovrebbe essere facilmente realizzabile in laboratorio.

References

[1] Mazzoldi, Nigro, Voci, Fisica I e II.
[2] J. D. Jackson, Elettrodinamica classica, Zanichelli 1984.
[3] David J. Griffiths, Introduction to electrodynamics.
[4] L. D. Landau e E. Lifchitz, Teoria dei Campi, Editori Riuniti.
[5] W. Panofsky e M. Phillips, Classical electricity and magnetism, Addison Wesley 1962.
[6] M.J. Lighthill, Introduction to Fourier analysis and generalized functions, Cambridge University Press.
[9] J. P. Duke, Synchrotron radiation, Oxford Science Pub., 2000
[10] A. S. Sedra e K. C. Smith, Microelectronic circuits, Oxford University Press, 1988
[11] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley 1972.
[12] H. Haken, 'Light', vol.II

[13] Murray Sargent III, Marlan O. Scully, Willis E. Lamb, Jr., 'Laser Physics'
[14] Derek Eastham, 'Atomic physics of lasers'. Facile e informativo.
[15] A.A. Andronov, A.A. Vitt e S.E. Khaikin, Theory of Oscillators, trad. F. Immirzi 1966, ristampa Dover 1987.
[16] L. Pontriaguine, Equations différentielles ordinaires, edizioni Mir, Mosca 1969.

apologo finale:

Here lie I, Martin Elginbrodde:
Ha'e mercy o' my soul, Lord God,
as I wad do, were I Lord God
And ye were Martin Elginbrodde. (epitaffio nella cattedrale di Elgin, Scozia).