Sistemi di equazioni lineari

$$
\begin{aligned}
a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 &= b_1 \\
a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 &= b_2 \\
a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

Per N equazioni

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\ x_j = b_i \qquad i = 1, N$$

la soluzione è unica se $\det(A) \neq 0$ e vale

$$\vec{x} = A^{-1}\ \vec{b}$$

ed è quindi equivalente al problema di trovare l'inversa di una matrice

Matrici triangolari

U è triangolare superiore se:
$u_{ij} = 0$ per $i < j$.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$U\vec{x} = \vec{b}$ è molto facile da risolvere. Analogamente L è triangolare inferiore se $l_{ij} = 0$ per $i > j$.

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_{11}\, x_1 + u_{12}\, x_2 + u_{13}\, x_3 &= b_1 \\ u_{22}\, x_2 + u_{23}\, x_3 &= b_2 \\ u_{33}\, x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

la cui soluzione è data da

$$\begin{aligned} x_3 &= b_3/u_{33} \\ x_2 &= (b_2 - u_{23}x_3)\,/u_{22} \\ x_1 &= (b_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3)\,/u_{11} \end{aligned}$$

ogni x_i viene usato solo dopo essere stato calcolato.

Per un sistema di N equazioni in N incognite la soluzione sarà:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{k=i+1}^{N} u_{ik}x_k \right) /u_{ii}$$

che va applicata calcolando gli x_i a partire dall'ultimo all'indietro.

Data l'efficacia di questo metodo, cerco di ridurre ogni sistema di equazioni $A\vec{x} = \vec{b}$ ad un sistema triangolare $U\vec{x} = \vec{b}'$ con opportuni U e $\vec{b}'$.

Eliminazione gaussiana

Prendo un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$
\begin{aligned}
a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 &= b_1 \\
a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 &= b_2 \\
a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + a_{33}\ x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

sommando ad un'equazione il multiplo di un'altra la soluzione non cambia. Sottraggo allora alla seconda equazione la prima moltiplicata per λ e ottengo

$$
(a_{21} - \lambda a_{11})\, x_1 + (a_{22} - \lambda a_{12})\, x_2 + (a_{23} - \lambda a_{13})\, x_3
$$

$$
= b_2 - \lambda b_1
$$

voglio eliminare il termine che moltiplica x_1, cosa che posso fare se scelgo

$$
\lambda = a_{21}/a_{11}
$$

ottenendo in questo modo che $a'_{21} = 0$

Posso ora ripetere il procedimento per la terza riga sottraendo la prima moltiplicata per a_{31}/a_{11} e ottengo

$$
\begin{aligned}
a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 &= b_1 \\
a'_{22}\ x_2 + a'_{23}\ x_3 &= b'_2 \\
a'_{32}\ x_2 + a'_{33}\ x_3 &= b'_3
\end{aligned}
$$

con

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} \qquad a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}$$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} \qquad a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13}$$

$$b'_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \qquad b'_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1$$

Sottraggo ora alla terza riga la seconda moltiplicata per a'_{32}/a'_{22} e ottengo

$$\begin{aligned} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + a_{13}\ x_3 &= b_1 \\ a'_{22}\ x_2 + a'_{23}\ x_3 &= b'_2 \\ a''_{33}\ x_3 &= b''_3 \end{aligned}$$

dove

$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23} \quad \text{e} \quad b''_3 = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ è stata quindi trasformata in $U\vec{x} = \vec{b}$ e il sistema può ora essere risolto per backsubstitution.

Pivoting

Il metodo fin qui descritto non è molto stabile, cioè gli errori si propagano amplificandosi, e possono portare a soluzioni molto sbagliate.

Si vede con la pratica che l'eliminazione gaussiana è molto più stabile se gli elementi di matrice sulla diagonale principale sono più grandi degli altri in valore assoluto.

Ciò si ottiene scambiando tra loro righe della matrice (pivoting parziale) oppure righe e colonne (full pivoting).

Se $|a_{31}| = \max(|a_{11}||a_{21}||a_{31}|)$ il pivoting parziale richiede lo scambio della prima e terza riga. Guardo ora la seconda e terza riga: se $|a_{32}| > |a_{22}|$ scambio la seconda e la terza riga

Come risultato su ogni diagonale sono piazzati gli elementi di massimo modulo tra quelli che stanno sotto l'elemento diagonale.

Scambiando le righe gli x_i sono invariati. Se scambio le colonne i e j, anche x_i viene scambiato con x_j.

Inversa di una matrice

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1$$

Se chiamo c_{ij} gli elementi di matrice di A^{-1}

$$\sum_j a_{ij} c_{jk} = \delta_{ik}$$

Sono N sistemi di equazioni. Fisso un valore di k e chiamo $\vec{b}^{(i)}$ il vettore che ha la i-esima componente uguale a uno, e nulle tutte le altre.

$$\sum_j a_{ij} c_{jk} = b_k^{(i)}$$

Si vede quindi che risolvere uno dei sistemi di equazioni vuole dire trovare gli elementi di matrice di una colonna della matrice inversa. Ripetendo per tutti i valori di i trovo la matrice intera

Decomposizione LU

Cerco di scrivere

$$A = LU$$

con L triangolare inferiore, U triangolare superiore e $l_{ii} = 1 \quad i = 1, \ldots, N$. Allora il sistema di equazioni

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

diventa

$$LU\vec{x} = \vec{b}$$

e posto

$$U\vec{x} = \vec{y}$$

devo risolvere due sistemi tridiagonali

$$L\vec{y} = \vec{b} \qquad \text{e} \qquad U\vec{x} = \vec{y}$$

Il tempo di soluzione è quindi $O(N)$ se la matrice A è LU-decomposta. Se ho M sistemi di equazioni

$$A\vec{x}_i = \vec{b}_i$$

posso fare la decomposizione una volta sola per tutti gli M sistemi e impiegherò $1/M$ del tempo necessario con l'eliminazione gaussiana.

Per ricavare L e U osservo che la prima parte dell'eliminazione gaussiana, che azzera la prima colonna sotto la diagonale si ottiene anche moltiplicando A per

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - l_{21}a_{11} & a_{22} - l_{21}a_{12} & a_{23} - l_{21}a_{13} \\ a_{31} - l_{31}a_{11} & a_{32} - l_{31}a_{12} & a_{33} - l_{31}a_{13} \end{pmatrix}$$

Scegliendo ora gli stessi valori di l_{21} e l_{31} si azzera la prima colonna. Moltiplicando poi il risultato per

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

si azzera la seconda colonna sotto la diagonale. Iterando il procedimento

$$L_{N-1}^{-1} L_{N-2}^{-1} \cdots L_1^{-1} A$$

ha tutti gli elementi sotto la diagonale nulli ed è quindi triangolare superiore. Questa è la matrice U. Chiamando

$$L^{-1} = L_{N-1}^{-1} L_{N-2}^{-1} \cdots L_1^{-1}$$

ho che

$$L^{-1}A = U \qquad \text{e quindi} \qquad A = LU$$

Resta da dimostrare che L è triangolare inferiore con elementi diagonali uguali ad uno. L'inverso di

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti

$$L_1^{-1}L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} + l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} + l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_N \cdot L_{N-1} \cdots L_1 = \left(L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_N^{-1}\right)^{-1}$$

è una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali uguali a 1

Soluzione di sistemi LU-decomposti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} y_1 = b_1 & \qquad y_1 = b_1 \\ l_{21}\, y_1 + y_2 = b_2 & \qquad y_2 = b_2 - l_{21}\, y_1 \\ l_{31}\, y_1 + l_{32}\, y_2 + y_3 = b_3 & \qquad y_3 = b_3 - l_{31}\, y_1 - l_{32}\, y_2 \end{array}$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} u_{33}\, x_3 = y_3 & \quad x_3 = y_3 / u_{33} \\ u_{22}\, x_2 + u_{23}\, x_3 = y_2 & \quad x_2 = (y_2 - u_{23}\, x_3)\, / u_{22} \\ u_{11}\, x_1 + u_{12}\, x_2 + u_{13}\, x_3 = y_3 & \quad x_3 = (y_3 - u_{12}\, x_2 - u_{13}\, x_3)\, / u_{11} \end{array}$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{N} u_{ij}\, x_j$$

Calcolo esplicito di L e U

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Scrivendo la matrice prodotto LU esplicitamente

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

Le prime 3 equazioni sono già risolte.
Le successive danno

$$\begin{array}{ll} l_{i1} = a_{i1}/u_{11} & 1 \leq i \leq n \\ u_{2i} = a_{2i} - l_{21}u_{1i} & 2 \leq i \leq n \\ l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} & \\ u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} & \end{array}$$

Matrici Tridiagonali

Si chiamano così se $a_{i,i}, a_{i+1,i}, a_{i,i+1}$ sono gli unici elementi diversi da zero.

La decomposizione assume una forma semplice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Si possono ora scrivere le equazioni per gli elementi $a_{i,i+1}$

$$a_{12} = u_{12} \quad a_{23} = u_{23} \quad a_{34} = u_{34}$$

per cui i $u_{i,i+1}$ sono subito determinati. Per gli elementi diagonali

$$a_{11} = u_{11} \qquad a_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22}$$

$$a_{33} = l_{32}u_{12} + u_{33} \quad a_{44} = l_{43}u_{34} + u_{44}$$

e per quelli sotto la diagonale principale

$$a_{21} = l_{21}u_{11} \quad a_{32} = l_{23}u_{12} + u_{22} \quad a_{43} = l_{43}u_{23} + u_{33}$$

L'ordine in cui calcolo i vari l e u è molto importante

1. calcolo $u_{i,i+1}$

2. calcolo $l_{i+1,i}$ e $u_{i,i}$ nella sequenza:

$$u_{11} \to l_{21} \to u_{22} \to l_{32} \to u_{33} \to l_{43} \to u_{44}$$

In generale, per una matrice di ordine N, la formula di risoluzione sarà:

$$u_{i,i+1} = a_{i,i+1} \qquad u_{11} = a_{11}$$

$$u_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-1}u_{i-1,i} \qquad l_{i+1,i} = a_{i+1,i}/u_{i,i}$$

Nota bene

- il procedimento di decomposizione è, in questo caso, $O(N)$, mentre in generale è $O(N^3)$;

- poiché anche la backsubstitution è $O(N)$, un sistema di equazioni tridiagonali può essere risolto con un algoritmo $O(N)$.