Integrazione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} w_j f(x_j) \qquad a \leq x \leq b$$

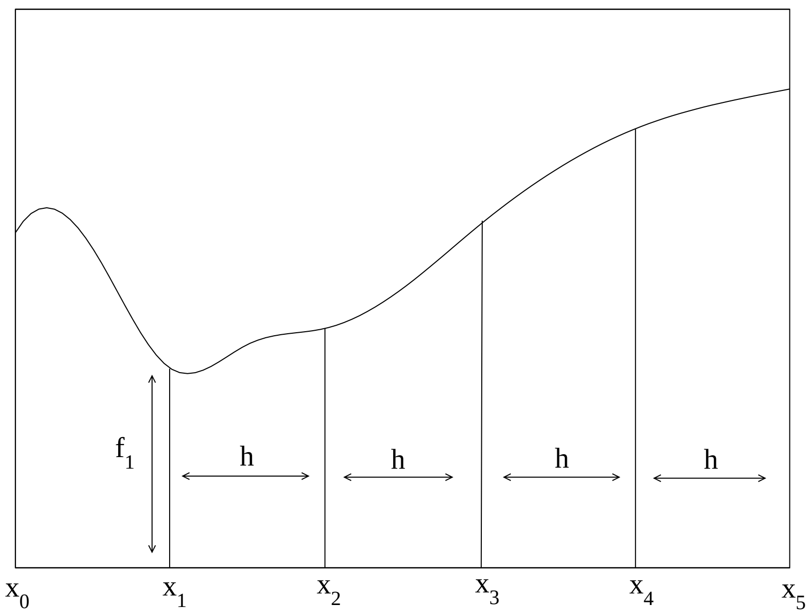
w_j pesi $\qquad N$ più piccolo possibile.

Metodi a spaziatura fissa

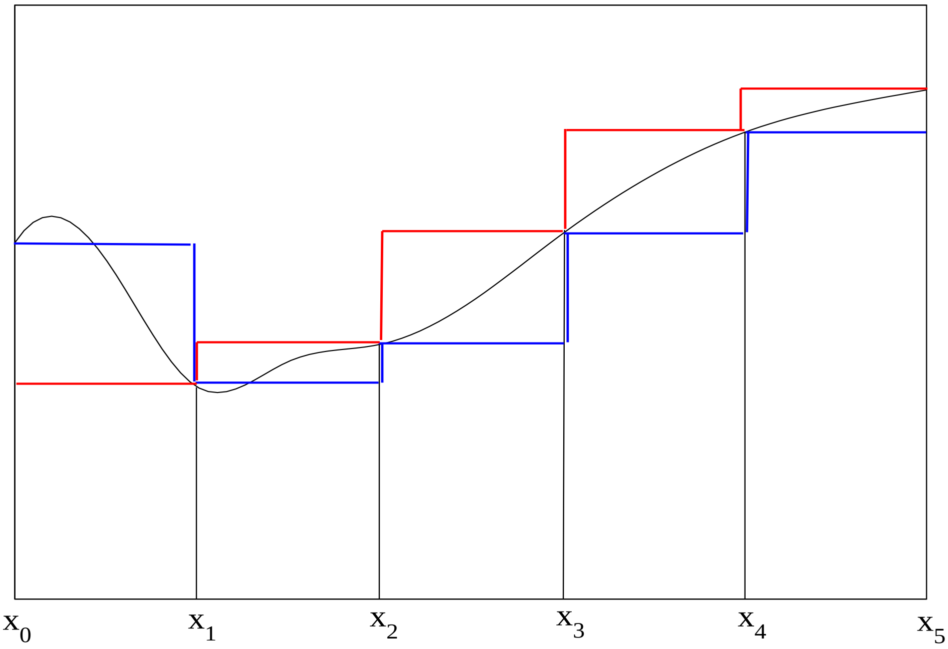
$$x_j = a + h \cdot j \qquad 0 \leq j \leq N \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

Chiusi: $\quad a \in x_j,\, b \in x_j$

Aperti: $\quad a, b \notin x_j$



Metodo del rettangolo



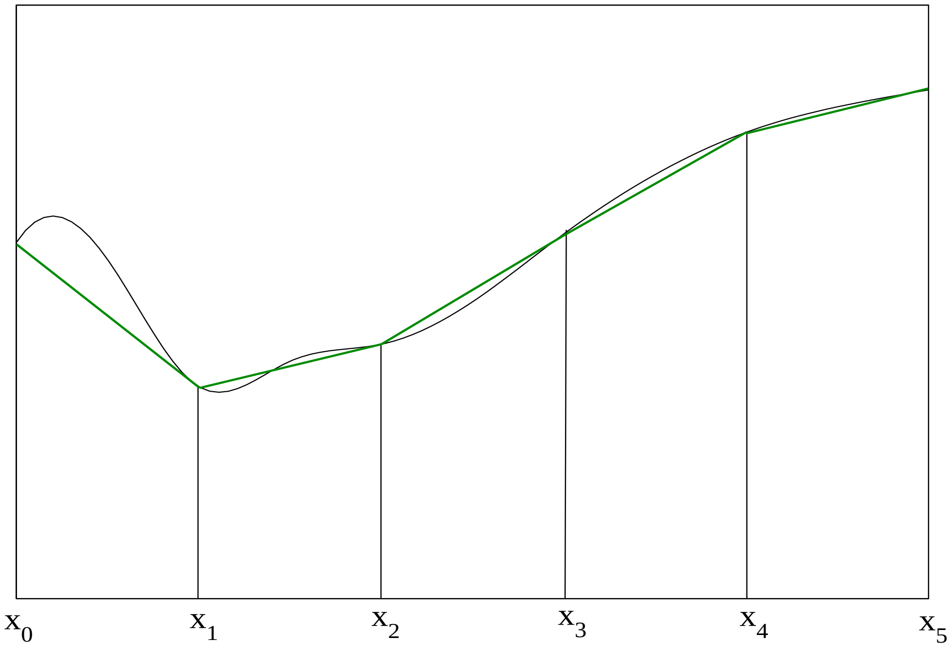
$$\int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{j=1}^{4} f(x_j) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = h\sum_{j=2}^{5} f(x_j)$$

Considero l'integrale tra 0 e h.

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x)\,dx = \int_0^h \left(f(0) + x\cdot f'(0) + O(x^2)\right)\,dx \\ = h\cdot f(0) + \frac{h^2}{2} f'(0) + O(h^3)\end{aligned}$$

Escludo quindi termini $O(h^2)$.

Metodo del trapezio



L'area del trapezio è 1/2 × (base1+base2) × altezza.

$$Area = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \cdot (x_2 - x_1) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (f_1 + f_2)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot (\frac{1}{2} \cdot (f_1 + f_2) + \frac{1}{2} \cdot (f_2 + f_3) +$$

$$\frac{1}{2} \cdot (f_3 + f_4) + \frac{1}{2} \cdot (f_4 + f_5))$$

$$w_1 = w_5 = \frac{h}{2} \qquad w_2 = w_3 = w_4 = h$$

Per ogni intervallo uso i due valori estremi per calcolare l'integrale, mentre per il rettangolo valutavo la funzione solo in un punto.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$f(b) \approx f(a) + f'(a)(b-a) \Longrightarrow f'(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)\cdot h + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left|\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b =$$

$$f(a)\cdot h + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} = (b-a)\cdot\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

Formula di Simpson

$$\boxed{\int_0^{2h} f(x)\,dx = Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)}$$

Sviluppo la serie di Taylor e uguaglio termine a termine

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + \frac{1}{6}x^3 f'''(0) + \frac{1}{24}x^4 f^{iv}(0) \\
\int_0^{2h} & f(x)\,dx = 2hf(0) + 2h^2 f'(0) + \frac{1}{6}(2h)^3 f''(0) \\
+ & \frac{1}{24}(2h)^4 f'''(0) + \frac{1}{120}(2h)^5 f^{iv}(0) \\
\int_0^{2h} & f(x)\,dx = 2hf(0) + 2h^2 f'(0) + \frac{4}{3}(h)^3 f''(0) \\
+ & \frac{2}{3}(h)^4 f'''(0) + \frac{4}{15}(h)^5 f^{iv}(0)
\end{aligned}$$

Uguagliando allo svilluppo del secondo membro

$$= Af(0) + B\left[f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + \frac{h^3}{6}f'''(0) + \frac{h^4}{24}f^{iv}(0)\right]$$

$$+C\left[f(0) + 2hf'(0) + 2h^2f''(0) + \frac{4}{3}h^3f'''(0) + \frac{2}{3}h^4f^{iv}(0)\right]$$

$$= (A+B+C)f(0) + h(B+2C)f'(0) + h^2\left[\frac{B}{2} + 2C\right]f''(0)$$

$$+ h^3\left[\frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C\right]f'''(0) + h^4\left[\frac{1}{24}B + \frac{2}{3}C\right]f^{iv}(0)$$

Poiché $f(x)$ è arbitraria devono esere uguali i termini che moltiplicano le derivate dello stesso ordine:

1. $A + B + C = 2h$
2. $h(B + 2C) = 2h^2$
3. $h^2(\frac{1}{2}B + 2C) = \frac{4}{3}h^3$
4. $h^3(\frac{1}{6}B + \frac{4}{3}C) = \frac{2}{3}h^4$
5. $h^4(\frac{1}{24}B + \frac{2}{3}C) = \frac{4}{15}h^5$

Le prime tre equazioni sono un sitema di 3 equazioni in 3 incognite.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1) A + B + C = 2h \\ 2) h(B + 2C) = 2h^2 \\ 3) h^2(\frac{1}{2}B + 2C) = \frac{4}{3}h^3 \end{array}}$$

Sottraendo h volte 2) da 3) ottengo:

$$h^2C = \frac{1}{3}h^3 \quad C = \frac{h}{3} \quad B = 2h - \frac{2}{3}h = \frac{4}{3}h \quad A = 2h - \frac{4}{3}h - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}h$$

$$\boxed{A = C = \tfrac{1}{3}h}$$

$$\boxed{B = \tfrac{4}{3}h}$$

Considero ora la quarta equazione:

$$B + 8C = 4h \quad \text{con} \quad B = \frac{4}{3}h \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{3}h$$

$$\frac{4}{3}h + \frac{8}{3}h = \frac{12}{3}h = 4h$$

L'equazione è soddisfatta. La quinta equazione non è invece soddisfatta e l'errore è perciò $O(h^5)$.

La formula di Simpson integra esattamente i polinomi di grado non superiore al terzo.

$$\int_0^{2h} x^3\,dx = \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^{2h} = \frac{2^4h^4}{4} = 4h^4$$

$$\frac{1}{3}hf(x=0) + \frac{4}{3}hf(x=h) + \frac{1}{3}hf(x=2h)$$

$$= 0 + \frac{4}{3}h^4 + \frac{8}{3}h^4 = \frac{12}{3}h^4 = 4h^4$$

Considero il caso di N intervalli tra a e b prendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spaziati di h e sia $f(x_i) = f_i$. Prendo tanti intervallini di ampiezza $2h$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)\,dx + \int_{a+4h}^{a+6h} f(x)\,dx + \cdots + \int_{b-2h}^{b} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx = \quad & h\left(\tfrac{1}{3}f_1 + \tfrac{4}{3}f_2 + \tfrac{1}{3}f_3\right) + h\left(\tfrac{1}{3}f_3 + \tfrac{4}{3}f_4 + \tfrac{1}{3}f_5\right) \\ & + h\left(\tfrac{1}{3}f_{N-2} + \tfrac{4}{3}f_{N-1} + \tfrac{1}{3}f_N\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{1}{3}f_1 + \frac{4}{3}f_2 + \frac{2}{3}f_3 + \cdots + \frac{4}{3}f_{N-1} + \frac{1}{3}f_N\right)}$$

Metodo di Gauss

Fino ad ora mi sono basato sullo sviluppo in serie di Taylor per trovare formule sempre più accurate di integrazione. Migliorando le formule potevo integrare polinomi di ordine sempre crescente.

Cerco una formula che, dato un numero finito di punti, sia esatta per i polinomi di grado più alto possibile.

Finora le formule hanno usato punti equispaziati. Se uso l'arbitrarietà che ho ancora nello scegliere x_j posso trovare formule che integrano polinomi di grado più alto.

Considero solo integrali tra -1 e 1. Ogni altro integrale su di un intervallo finito può essere ricondotto a questo con un cambio di variabili.

Se suppongo di conoscere i punti x_j dove viene valutata la funzione, posso risalire ai pesi w_j per i quali deve essere moltiplicato $p(x_j)$ per rendere esatto l'integrale. Il sistema di N equazioni in N incognite w_j

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \sum_{j=1}^{N} w_j \cdot p(x_j)$$

da' una soluzione unica se si conderano i primi N monomi $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{N-1}$ e le loro combinazioni lineari, quindi tutti i polinomi di grado inferiore a N.

Posso allora usare la scelta degli x_j per integrare anche polinomi di grado superiore.

Definisco i polinomi di Legendre $P_n(x)$.

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$
$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x)$$

Per $n = 2$:

$$2P_2(x) = 3xP_1(x) - P_0(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Se $p(x)$ è un polinomio di grado $2N-1$ posso scrivere

$$p(x) = q(x)P_N(x) + r(x)$$

dove $q(x)$ e $r(x)$ sono rispettivamente quoziente e resto, entrambi di grado $N-1$.

Ne segue in particolare che:

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} q(x)P_N(x)\,dx + \int_{-1}^{1} r(x)\,dx$$

Sfrutto ora una particolare proprietà dei polinomi di Legendre, quella di essere ortogonali a tutti i polinomi di grado inferiore, cioè

$$\int_{-1}^{1} q(x) P_N(x)\, dx = 0 \quad \text{se} \quad q(x) \quad \text{è di grado inferiore a} \quad N$$

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = \int_{-1}^{1} r(x)\, dx = \sum_{k=1}^{N} w_k r(x_k)$$

L'integrazione del polinomio di grado $2N-1$ è ridotta a quella di un polinomio di grado $N-1$, che però non conosco.

Uso l'arbitrarietà nello scegliere x_j per liberarmi di $r(x)$

Poiché

$$p(x) = q(x) P_N(x) + r(x)$$

Scelgo per x_j i valori degli N zeri di $P_N(x)$, che esistono e sono reali. Allora, dato che

$$p(x_j) = q(x_j) P_N(x_j) + r(x_j) = r(x_j)$$

trovo

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} w_k r(x_k) = \sum_{k=1}^{N} w_k p(x_k)$$

x_k e w_k a questo punto non dipendono da $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$, ma solo da $P_N(x)$ che sono funzioni fissate quando si sceglie N e sono tabulate una volta per tutte.

Per una generica funzione $f(x)$ si scriverà:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N} w_k f(x_k)$$

Questa formula a N punti è esatta per polinomi fino al grado $2N-1$. Integra bene funzioni polinomiali o che assomigliano a polinomi.

Non va usata con funzioni come: e^{-x} ed e^{-x^2}

Per estremi di integrazione qualsiasi uso un cambiamento di variabile

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y$$

con $-1 \le y \le 1$, $dx = \frac{b-a}{2}dy$ ottengo

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y)\,dy$$

Metodi gaussiani per funzioni non polinomiali

Se devo integrare una funzione del tipo

$$x^n \exp(-x^2)$$

il metodo visto prima non si presta. Però è possibile estenderlo in modo da poter integrare con precisione questa funzione, purché si usini i polinomi di Hermite al posto di quelli di Legendre. La formula d'integrazione è allora

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) f(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i^H f(x_i^H)$$

dove x_i^H sono ora gli zeri dei polinomi di Hermite che sono definiti da

$$H_0(x) = 1 \quad H_1(x) = 2x \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}$$

e che hanno la proprietà

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}$$

Esistono formule per integrare funzioni del tipo

$$\exp(-x)p(x)$$

con i polinoni di Laguerre e

$$\frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

con i polinomi di Chebychev