Polinomi

I polinomi della forma

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_N \cdot x^N$$

richiedono N potenze, N somme e N moltiplicazioni per essere valutati Un metodo più efficiente è

$$p(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \cdots + x \cdot (a_{N-1} + a_N \cdot x)))$$

che richiede solo N moltiplicazioni e N somme.

In pratica devo fare un ciclo

1. assegno a $p(x)$ il valore a_N
2. per j che va da $N-1$ a 0 scendendo un numero alla volta
3. moltiplico p per x e aggiungo a_j
4. ripeto il punto precedente finché j non raggiunge zero

Esempio: $N = 3$

- $P = a_3$
- $P = P \cdot x + a_2 = a_3 \cdot x + a_2$
- $P = P \cdot x + a_1 = a_3 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_1$
- $P = P \cdot x + a_0 = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Derivate

$$p'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \cdots + N \cdot a_N \cdot x^{N-1}$$

Si possono calcolare in modo analogo ai polinomi e assieme ad essi con il seguente trucco

1. assegno a $p(x)$ il valore a_n
2. assegno a $p'(x)$ il valore 0
3. per j che va da $N-1$ a 0 scendendo un numero alla volta
4. moltiplico $p'(x)$ per x e aggiungo $p(x)$
5. moltiplico $p(x)$ per x e aggiungo a_j
6. ripeto i due punti precedenti finché j non raggiunge zero

Esempio: polinomio di terzo grado

- $D = 0$
- $P = a_3$
- $D = D \cdot x + P = a_3$
- $P = P \cdot x + a_2 = a_3 \cdot x + a_2$
- $D = D \cdot x + P = 2 \cdot a_3 \cdot x + a_2$
- $P = P \cdot x + a_1 = a_3 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_1$
- $D = D \cdot x + P = 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$
- $P = P \cdot x + a_0 = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

Divisione per un polinomio di primo grado

Se il mio polinomio è

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$$

posso dividerlo per un polinomio di primo grado $x - z$ ottenendo un quoziente di grado $N - 1$ e una costante come resto.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_N x^N = (x - z) \cdot (c_0 + c_1 x + \cdots + c_{N-1} x^{N-1}) + R$$

Sviluppando il prodotto a secondo membro ottengo

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N = R - z c_0 + (c_0 - z c_1) x + (c_1 - z c_2) x^2 + \cdots \\ + (c_{N-2} - z c_{N-1}) x^{N-1} + c_{N-1} x^N$$

e dal confronto quindi

$$a_N = c_{N-1} \quad a_{j+1} = c_j - z c_{j+1} \ \ (j = 0, \ldots, N-2) \quad a_0 = R - z c_0$$

Ovvero

$$c_{N-1} = a_N \quad c_j = a_{j+1} + z c_{j+1} \ \ (j = 0, \ldots, N-2) \quad R = a_0 + z c_0$$

Questa formula mi sugegrisce un modo per trovare le radici dei polinomi: ne trovo una con un metodo qualsiaisi, quindi divido il polinomio per $x - z$ dove z è lo zero, e cerco un nuovo zero per un poliomio di grado inferiore