

Ricorrenza

Il problema dei conigli

Un allevatore compra una coppia di conigli appena nati. Dopo due mesi i conigli sono in grado di riprodursi, dando vita ad un'altra coppia di conigli; questa può riprodursi dopo altri due mesi. Supponendo che nessun coniglio muoia, qual è il numero totale delle coppie di conigli dopo N mesi?

la successione del numero di coppie è

$$1, 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5, \dots$$

e, in generale

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{con} \quad u_0 = 1 \quad \text{e} \quad u_1 = 1$$

Si può affrontare il problema al calcolatore in due modi

- mettere tutti i numeri in un vettore (se non sono troppi)
- applicare la formula spostando n

Esempio 1

$u[0]=1$

$u[1]=1$

per n che va da 2 a N

$u[n]=u[n-1]+u[n-2]$

ripeti

Esempio 2

$unm2=1$

$unm1=1$

per n che va da 2 a N

$un = unm1 + unm2$

$unm2 = unm1$

$unm1 = un$

ripeti

Formula di Binet

Cerco una successione come quella di Fibonacci ma fatta a potenza

$$q^N = q^{N-1} + q^{N-2}$$

che implica

$$q^2 - q = 1$$

e che ha due soluzioni

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

scrivo

$$u_N = c_1 \cdot q_1^N + c_2 \cdot q_2^N$$

con

$$c_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

Per $N \rightarrow \infty$ il contributo di q_2^N scompare e
 $u_N \approx c_1 \cdot q_1^N$

Polinomi ortogonali

Molti polinomi sono importanti per la Fisica. Spesso li caratterizza una relazione di ricorrenza che permette anche di calcolarli.

- – Polinomi di Legendre
 - $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$
 - $(N + 1)P_{N+1} = (2N + 1)xP_N(x) - NP_{N-1}(x)$
- – Polinomi di Hermite
 - $H_0(x) = 1, H_1(x) = x$
 - $H_{N+1} = 2 \cdot xH_N(x) - 2 \cdot N \cdot H_{N-1}(x)$
- – Polinomi di Laguerre
 - $L_0^a(x) = 1, L_1^a(x) = 1 + a - x$
 - $(N + 1)L_{N+1}^a = (2N + 1 + a - x) \cdot L_N^a(x) - (N + a) \cdot L_{N-1}^a(x)$
- – Polinomi di Chebychev
 - $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$
 - $T_{N+1} = 2 \cdot x \cdot T_N(x) - T_{N-1}(x)$

Integrali dei polinomi

1.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x) = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}$$

3.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^a(x)L_m^a(x) = \delta_{nm} \frac{\Gamma(n+a+1)}{n!}$$

4.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{nm} \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \delta_{nm} \pi \quad \text{se } n \text{ è } 0$$

Funzioni associate di Legendre

Sono importanti nel calcolo delle armoniche sferiche

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

P_l^m sono le *funzioni associate di Legendre*. Per $m = 0$ si trovano i polinomi di Legendre. Posso calcolarle tramite una relazione di ricorrenza

$$1. P_m^m(x) = (-1)^m (2m-1)!! (1-x^2)^{m/2}$$

$$2. P_{m+1}^m(x) = (2m+1) \cdot x \cdot P_m^m(x)$$

$$3. (l-m)P_l^m(x) = (2l-1) \cdot x \cdot P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x)$$

Funzioni di Bessel e ricorsione inversa

Le funzioni di Bessel sferiche possono essere definite da

$$j_0(x) = \sin(x)/x \quad j_1(x) = \sin(x)/x^2 - \cos(x)/x$$

$$j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n-1}(x)$$

Se x è piccolo, $(2n+1)/x$ è grande Cosa succede in una ricorrenza in cui

$$u_{n+1} = K u_n - u_{n-1}$$

con K molto grande? Cerco la risposta in una ricorrenza della forma

$$q^{n+1} = K q^n - q^{n-1} \quad q^2 - K q + 1 = 0$$

che ha soluzione

$$q_{\pm} = (K \pm \sqrt{K^2 - 4})/2$$

che dà circa

$$q_+ = K \quad q_- = \frac{1}{K}$$

e quindi

$$u_n = A_+ q_+^n + A_- q_-^n$$

Se $A_+ = 0$, basta un piccolo errore numerico perché la soluzione corrispondente a q_+ prevalga comunque. Per ovviare a questo inconveniente parto da u_n e faccio la ricorsione all'indietro

$$u_0 = A_+ / q_+^n + A_- / q_-^n$$

che fa prevalere il termine che dipende da q_- .
In pratica considero la formula inversa

$$j_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x)$$

con valori iniziali $j_N(x)$ e $j_{N-1}(x)$ casuali e $N \gg n$. Imponendo il giusto valore di $j_0(x)$ troverò anche $j_n(x)$.

Esercizio

Considero il potenziale generato da una distribuzione di carica così fatta:

$\rho = \rho_0 \cos^4(\theta)$ $r < R_0$ e $\rho = 0$ altrimenti attorno alla direzione di un certo asse.

Il potenziale sull'asse è allora

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} r'^2 dr' \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho_0 \cos^4(\theta)}{z \sqrt{1 - (r'/z) \cos(\theta) + (r'^2/z^2)}}$$
$$V(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R_0^{l+3}}{(l+3)z^l} \int_{-1}^{+1} dx x^4 P_l(x)$$

Fare un grafico dell'andamento di $\epsilon_0 V(z)/\rho_0$ al variare di z includendo i vari termini di multipolo e prendendo $R_0 = 1 \text{ cm}$