

## Interpolazione e Approssimazione

Dato un insieme di punti di ascisse e ordinate  $(x_j, f_j)$  mi serve qualche volta di avere a disposizione una funzione, di solito con proprietà particolari, che passi per tutti questi punti. La funzione che passa per  $N$  punti non è certo unica, ed il procedimento di trovare una di queste funzioni è detto **interpolazione**

## Metodo di Lagrange

Un metodo semplice per interpolare  $N$  punti è quello dei polinomi di Lagrange. Per fare un esempio il polinomio che passa per tre punti può essere scritto come

$$P(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Per un numero di punti grande (per esempio 20) il polinomio oscilla paurosamente e non rappresenta più, con ogni probabilità, l'andamento di una funzione fisicamente significativa.

## Spline cubiche

Voglio una funzione che sia almeno continua con derivate prime e seconde; in ogni intervallo  $[x_{j-1}, x_j]$  chiedo che la funzione sia un polinomio di terzo grado. Nei punti estremi devo imporre le condizioni di continuità per la funzione e le sue derivate prime e seconde

La funzione è cubica, quindi le sue derivate sono lineari. Chiamo  $M_j$  le derivate seconde in  $x_j$ . Allora

$$s_j''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

Posto  $h_j = x_j - x_{j-1}$

$$s_j'(x) = -M_{j-1} \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + C_j$$

$$s_j(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} \\ + C_j(x - x_{j-1}) + E_j$$

## Condizioni ai limiti

Devo imporre

$$s(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{e} \quad s(x_j) = f_j$$

e quindi

$$f_{j-1} = M_{j-1} \frac{h_j^2}{6} + E_j$$

$$f_j = M_j \frac{h_j^2}{6} + C_j h_j + E_j$$

$$E_j = f_{j-1} - M_{j-1} \frac{h_j^2}{6}$$

$$C_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j^2}{6} (M_j - M_{j-1})$$

Impongo ora che la spline nell'intervallo  $j$  si raccordi con quella nell'intervallo  $j+1$ . Questo è già vero per la funzione (avendo imposto che sia uguale a  $f_{j-1}$  e  $f_j$  agli estremi) e per le derivate seconde (avendo scelto  $M_j$  in modo indipendente dall'intervallo). Rimane da imporre la continuità delle derivate prime.

## Continuità delle derivate

In  $x_j$

$$M_j \frac{h_j}{2} + C_j = -M_j \frac{h_{j+1}}{2} + C_{j+1}$$

$$M_j \frac{h_j}{2} + \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}) =$$
$$-M_j \frac{h_{j+1}}{2} + \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1} - M_j)$$

Scrivendo questa come equazione per gli  $M_j$  ottengo

$$l_j M_{j-1} + 2M_j + u_j M_{j+1} = y_j$$

con

$$l_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}} \quad u_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$$

$$y_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left( \frac{f_{j+1} - f_j}{h_{j+1}} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} \right)$$

Si possono anche imporre le due condizioni

$$2M_1 + u_1 M_2 = y_1 \quad l_N M_{N-1} + 2M_N = y_N$$

che è l'equazione lineare associata ad una matrice tridiagonale

## Approssimazione

Se  $f(x)$  è difficile da calcolare (impiega molto tempo) e mi servono i suoi valori solo con una certa precisione

Uso i polinomi di Chebychev definiti da

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad -1 \leq x \leq 1$$

da cui si possono facilmente derivare le proprietà

$$T_0(x) = 1 \quad T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

le relazioni di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \pi & (n = m = 0) \\ \pi/2 & (n = m \neq 0) \end{cases}$$

Definendo

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) T_{j-1}(x_k) \quad x_k = \cos\left(\frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{N}\right)$$

e scrivendo

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^N c_j T_{j-1}(x) - \frac{1}{2}c_1$$

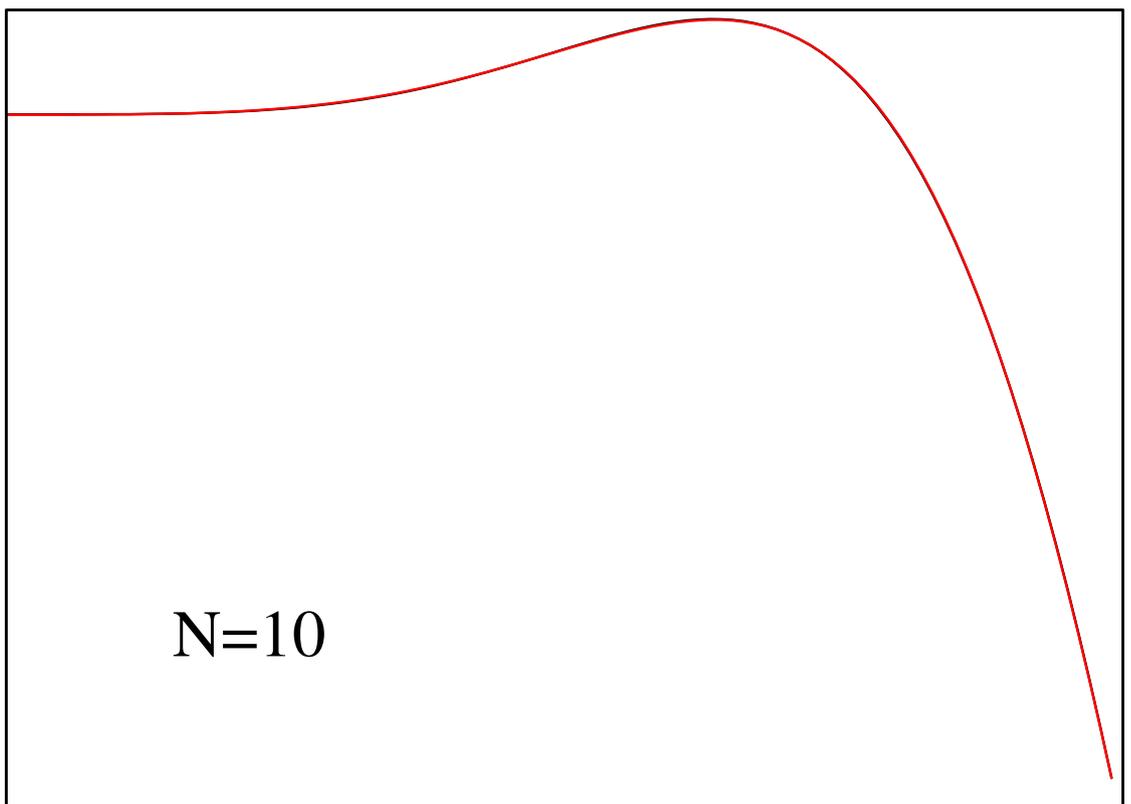
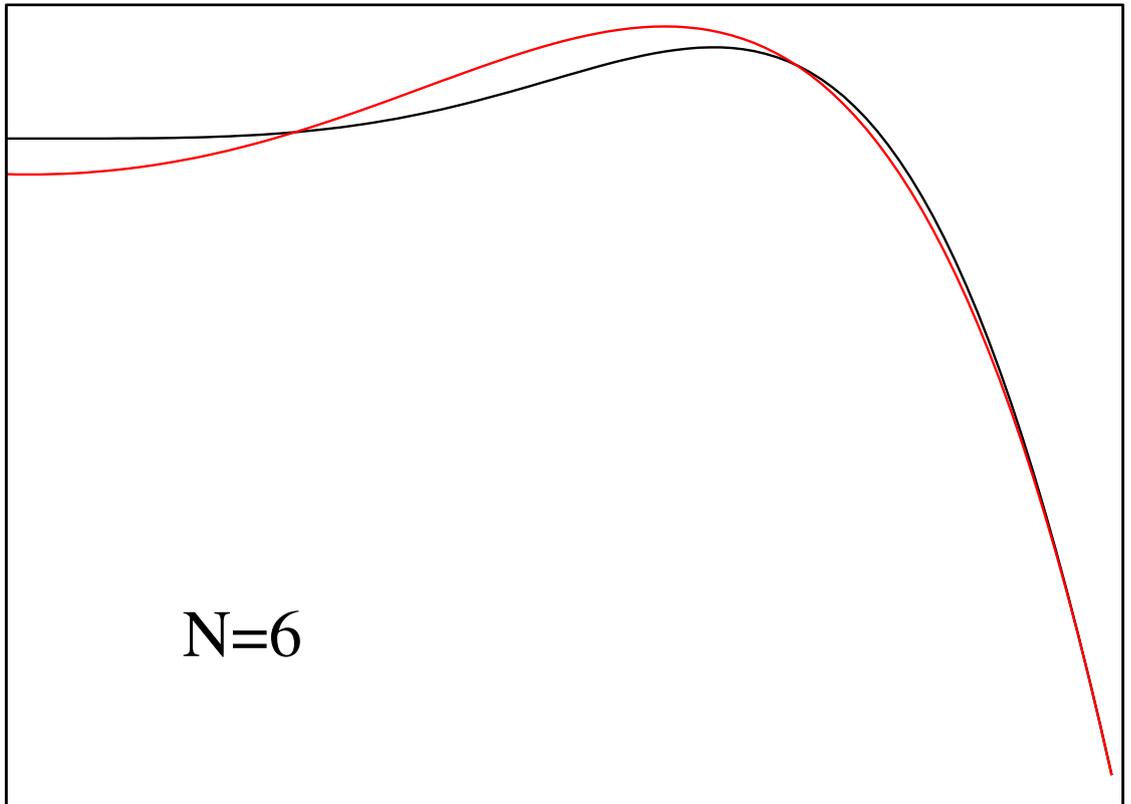
Si trova che per  $x = x_k$  l'approssimazione è esatta e che altrove è una delle migliori approssimazioni uniformi, cioè indipendenti da  $x$ .

Se la funzione  $f(x)$  è definita tra  $a$  e  $b$  posso definire

$$g(x) = f\left(\frac{2x}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)$$

e approssimarla tra  $-1$  e  $+1$

$$x^3 e^x \sin(4x)$$



## Integrazione con i polinomi di Chebychev

Una volta approssimata la funzione posso pensare di integrarla integrando la funzione approssimata

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^N c_k \int_{-1}^{+1} T_{k-1}(x)dx - c_1$$

L'integrale di  $T_k$  può essere valutato facilmente con una sostituzione di variabile

$$\int_{-1}^{+1} T_k(x)dx = \int_0^\pi T_k(\cos(y)) \sin(y)dy =$$

$$\int_0^\pi \cos(k \cdot y) \sin(y)dy = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}$$

se  $k$  è pari, zero altrimenti. Per  $k = 0$  l'integrale vale 2. In conclusione si può integrare con la formula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx c_1 + \sum_{k=3}^N c_k \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k-2} \right)$$

## Esercizi

- Fare un grafico delle funzioni

$$\frac{1}{x^2 + 1}$$

e

$$\exp(-x^2)$$

e delle loro approssimazioni con polinomi di Chebychev con  $N = 5$  e  $N = 10$