# Numeri pseudocasuali

*"Numeri casuali non devono essere generati con un metodo scelto a caso"* D.Knuth

- Il periodo deve essere il più lungo possibile;
- la distribuzione deve essere uniforme in $[0,1]$
  $p(x)$=costante in $[0,1]$;
- le correlazioni devono essere trascurabili
  $\left\langle x_{n+1} \cdot x_n \right\rangle - \left\langle x_{n+1} \right\rangle \langle x_n \rangle = 0$;
- distribuzioni uniformi:
  - metodi lineari congruenti;
  - metodi Fibonacci lagged;
  - metodi non lineari, etc
- distribuzioni non uniformi:
  - distribuzione gaussiana e metodo di Box-Müller
  - distribuzione qualsiasi;

# Metodi lineari congruenti (LCM)

- $x_{n+1} = (a \cdot x_n + b) \bmod m$;
- di solito $b = 0$;
- $a$ è primo;
- $m$ è primo, oppure $m = 2^n$

Problema

overflow per moltiplicazione per $a$.

Soluzione

$m = a \cdot q + r$ con $r < q$ scrivo $x_n = z \cdot q + w$

allora

$a \cdot x_n = a \cdot (z \cdot q + w) = a \cdot q \cdot z + a \cdot w = (a \cdot q + r) \cdot z - r \cdot z + a \cdot w$

$a \cdot x_n = m \cdot z - r \cdot z + a \cdot w$

con $r \cdot z < q \cdot z < x_n < m$ e $a \cdot w < a \cdot q < m$

Quindi $a \cdot w - r \cdot z$ è minore di $m$ ed il risulato è

$a \cdot x_n \bmod m = a \cdot w - r \cdot z (+m) =$

$a \cdot (x_n \bmod m) - r \cdot (x_n / q)\ (+m)$

Esempio:

$a = 16807 \quad m = 2^{31} = 2147483648$

$q = 127773 \quad r = 2836$

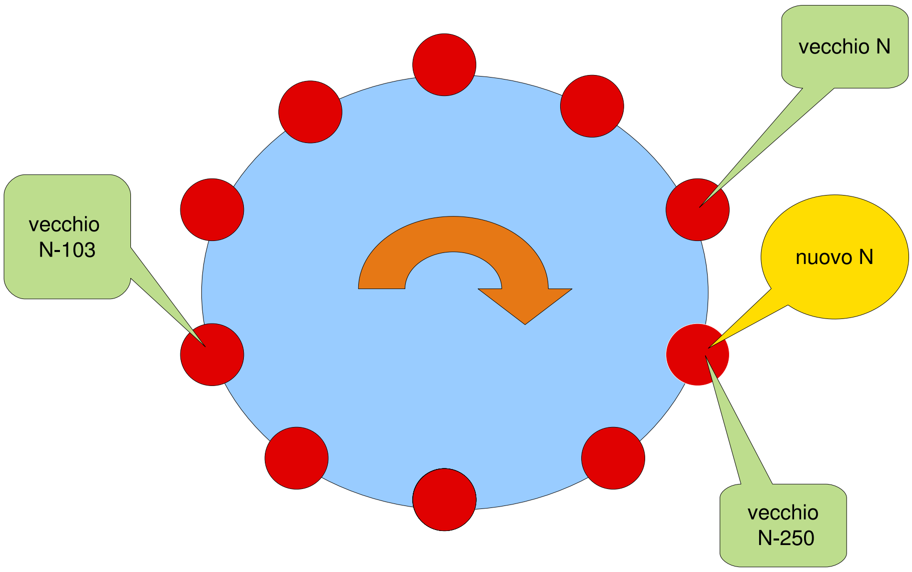
## Metodi Fibonacci lagged

$$x_n = \sum_{q=1}^{N} a_q x_{n-q}$$

- Simili alla successione di Fibonacci, ma con più termini; di solito solo un paio di $a_q$ sono diversi da zero;
- occorre una certa attenzione alle condizioni iniziali; si può provare a usare LCM come "starter" per i primi termini;
- hanno periodo molto lungo e scarse correlazioni;
- più successioni indipendenti con la stessa regola;

## Esempio: r250

- $x_n = \sum_{j=1}^{250} a_q x_{n-q}$
- periodo $N \approx 2^{250}$
- $a_q = 0$ escluso che per $q = 103, 250$ per cui $a_q = 1$
- quindi $x_n = x_{n-103} + x_{n-250}$
- in realtà si usa $xor$: $x_n = x_{n-103}\ xor\ x_{n-250}$
- memorizzo gli ultimi 250 termini in uno stack circolare per non dover spostare ad ogni passo un intero vettore



## Metodo di Box-Müller

Voglio una distribuzione gaussiana: se $x_1$ e $x_2$ sono distribuite uniformemente in $(0,1)$ definisco

$$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\sin(2\pi x_2)$$

$$y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\cos(2\pi x_2)$$

Quindi $x_1 = \mathrm{e}^{-(y_1^2+y_2^2)/2}$

e $\quad p(y_1)\,p(y_2)\,dy_1\,dy_2 = p(x_1)\,p(x_2)\,dx_1\,dx_2 = dx_1\,dx_2$

$$p(y_1)\,p(y_2)\,\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = 1$$

$$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \left|\begin{array}{cc} \frac{-1}{x_1\sqrt{-2\ln x_1}}\sin(2\pi x_2) & 2\pi\sqrt{-2\ln x_1}\cos(2\pi x_2) \\ \frac{-1}{x_1\sqrt{-2\ln x_1}}\cos(2\pi x_2) & -2\pi\sqrt{-2\ln x_1}\sin(2\pi x_2) \end{array}\right|$$

$$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \frac{2\pi}{x_1}$$

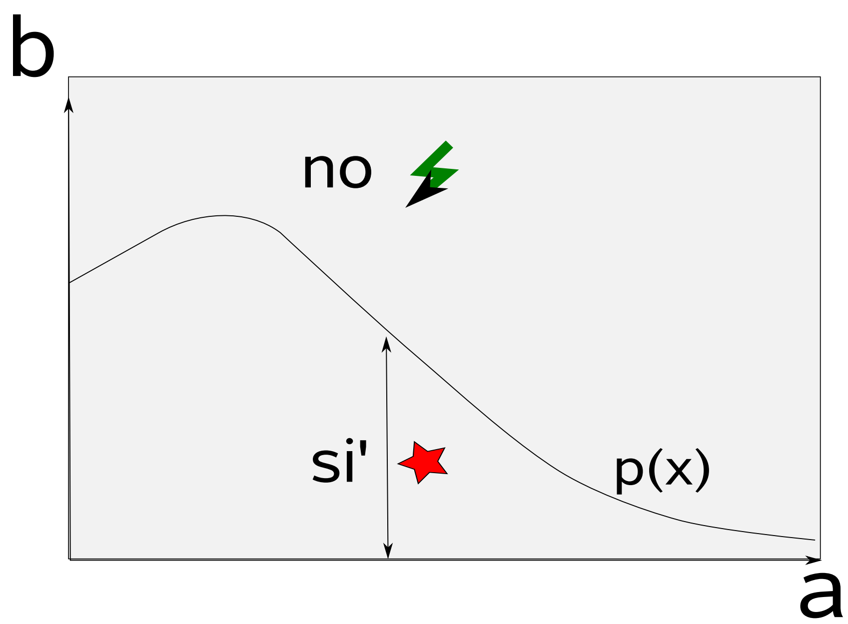
Percio' $\quad p(y_1)\,p(y_2) = x_1 = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(y_1^2+y_2^2)/2}$

$$p(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y_1^2/2} \qquad p(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y_2^2/2}$$

# Distribuzioni qualsiasi

Se voglio ottenere una distribuzione con probabilità $p(x)$ arbitraria limitata superiormente.

- suppongo che mi interessi $0 \leq x \leq a$
- suppongo che $p(x) \leq b \quad \forall x$ in $[0, a]$
- scelgo un numero a caso $x$ con distribuzione uniforme nel range $[0, a]$
- scelgo un secondo numero a caso $y$ distribuito uniformemente in $[0, b]$
- se $y < p(x)$ accetto il numero, altrimenti procedo con altri due numeri. In questo modo $x$ è accettato con probabilità $p(x)$.



## Distribuzioni qualsiasi II

Voglio generare numeri random con probabilità $f(x)$.

- definisco

$$F(x) = \int_0^x f(x')\,dx'$$

- genero numeri random $y$ distribuiti uniformemente in $[0,1]$
- trovo $x$ per cui $F(x) = y$
- $x$ sarà distribuito con probabilità $f(x)$. Infatti

$$p(y)\,dy = dy = F'(x)\,dx = f(x)\,dx = p(x)\,dx$$

- perché questa procedura funzioni è necessario poter invertire $F$ per scrivere $x = F^{-1}(y)$

# Applicazioni

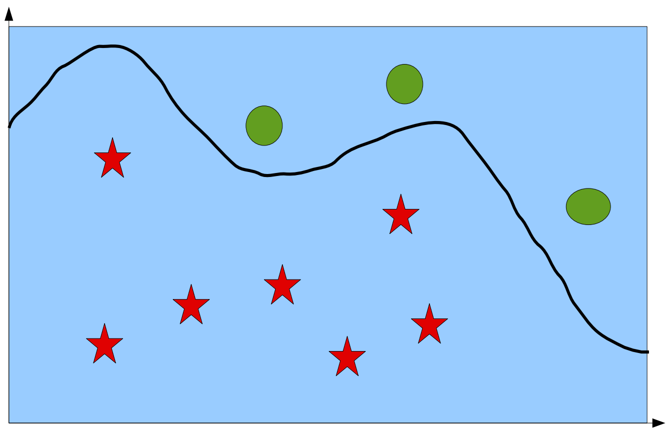
## Integrazione con numeri pseudocasuali

Data $f(x)$ voglio calcolare

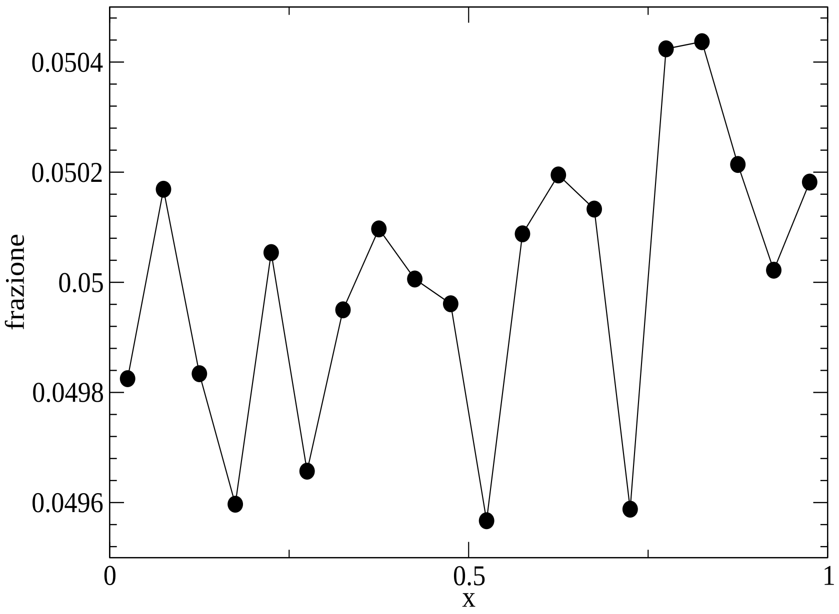
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

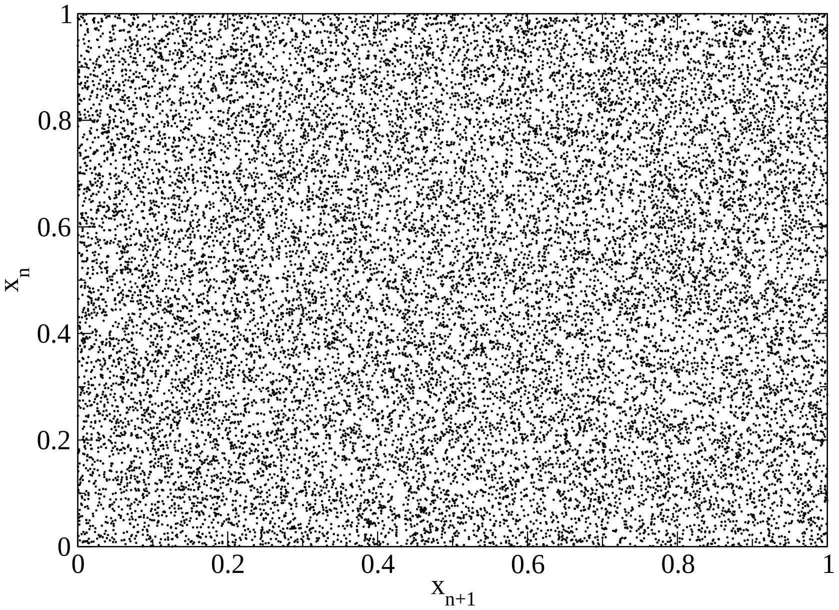
dove so che $f(x)$ è compresa tra zero e $f_{max}$.

- genero coppie di numeri che corrispondono a un punto nel rettangolo che ha lati tra $a$ e $b$ e tra zero e $f_{max}$.
- calcolo la percentuale $P$ di punti che cadono sotto la curva $y = f(x)$
- l'integrale vale $P \cdot (b - a) \cdot f_{max}$



# Test di uniformità e correlazioni



# Problemi

## Volume di una sfera unitaria

- $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;
- considero solo un ottante con $x > 0, y > 0, z > 0$;
- genero una terna di numeri casuali $x, y$ e $z$;
- guardo se $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, nel qual caso accetto la terna;
- ripeto per un gran numero di terne;
- alla fine divido le terne accettate per quelle totali;
- moltiplico per 8;
- nota: l'errore è $O(1/\sqrt{N})$

## Moto Browniano

- prendo $x = 0$ inizialmente;
- noto $x(t)$, all'istante successivo $x(t + \Delta t)$ è dato da $x(t + \Delta t) = x(t) \pm \epsilon$ dove il segno $\pm$ è random, con i due segni equiprobabili
- dopo $N$ passi verifico che, mediamente, $x^2 = N\epsilon^2$;

## Teorema del limite centrale

- considero le somme $\xi_1 \ldots \xi_N$;
- guardo come è distribuita la media al variare di $N$;
- per $N$ grande devo trovare una distribuzione gaussiana;