# Caos

- L'energia è sempre conservata;
- un sistema bidimensionale è descritto da $x, y, p_x, p_y$ o comunque da quattro coordinate canoniche;
- l'esistenza di una costante del moto limita lo spazio della fasi accessibile a $D = 3$;
- se considero i punti con $x = 0$ avrò un insieme con $D = 2$ per ogni traiettoria;
- se l'energia è l'unica costante del moto il sistema si dice ergodico;
- se esiste una seconda costante del moto la dimensione di questo insieme si abbassa di uno e l'insieme stesso si riduce ad una linea: il sistema si dice integrabile;
- esempi possibili: potenziali $V(x, y)$ e mappe $T : (x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$

# Sezioni di Poincaré

- Pongo certe condizioni iniziali;
- integro le equazioni del moto;
- seleziono i punti per cui la traiettoria attraversa una certa superficie (ad esempio $x = 0$) e li stampo $(y, p_y)$;
- ripeto per diverse condizioni iniziali fino a riempire lo spazio delle fasi;
- le traiettorie che occupano un'area sono caotiche, quelle che stanno su una linea integrabili;
- per valori particolari (risonanze) le linee si possono ridurre a un punto o a un numero finito di punti;

# Hamiltoniana di Hénon

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

Le equazione di Hamilton sono

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

posso usare i metodi di Eulero o Runge-Kutta.
Metodi precisi sono qui molto utili;

Energia nel range $0 - 1/6$;

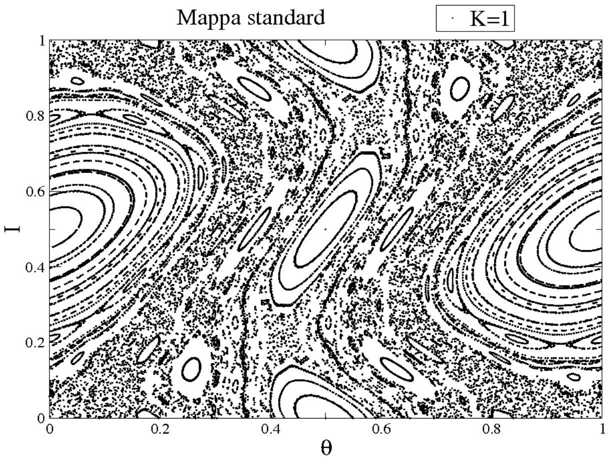
Visualizzo il piano $x = 0$ usando le coordinate $(y, p_y)$;

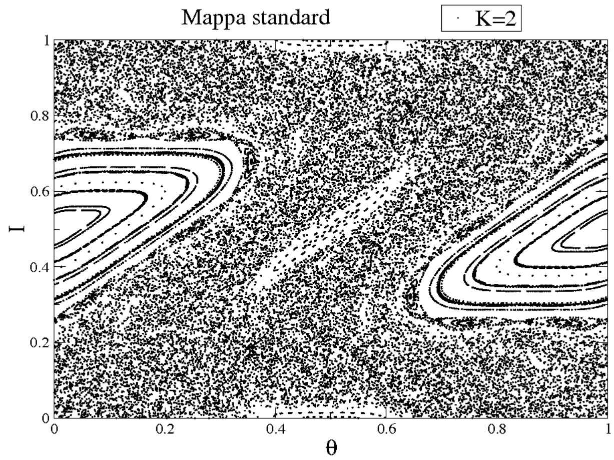
controllo sempre la conservazione dell'energia;

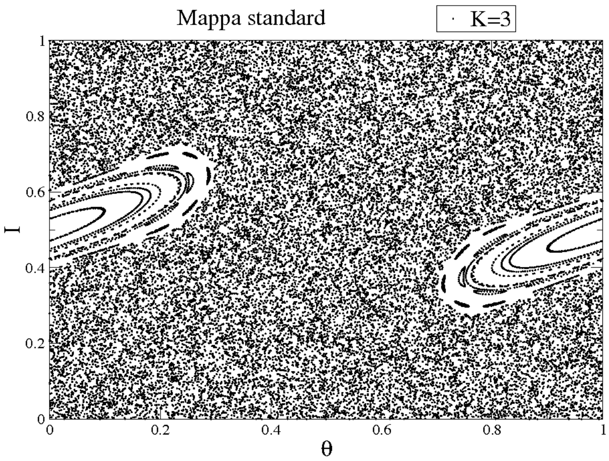
# Mappa standard

$$I_{n+1} = I_n + K \cdot sin(\theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$



# Calcolo della sezione di Poincaré per l'hamiltoniana di Hénon

1. Scrivete l'hamiltoniana;

2. scrivete le equazioni del moto;

3. integrate con un metodo preciso le equazioni del moto per una particolare scelta delle condizioni iniziali;

4. verificate la conservazione dell'energia, anche come criterio per terminare l'integrazione;

5. scegliete un insieme ragionevole di condizioni iniziali $(x, p_x)$: notate che il potenziale ha un punto di sella che si può trovare risolvendo $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$; l'energia deve stare sotto il corrispondente valore vicino a $x = y = 0$;

6. selezionate una superficie (esempio: $x = 0$) e un segno dell'impulso (esempio: $p_x > 0$) e fate il grafico; usate punti non collegati da linee.

# Raddoppio di periodo

- Su un'isola lontana viene importato un certo numero di animali;
- al passare delle generazioni il numero di animali cambia: indico con $x_n$ la popolazione dopo $n$ generazioni divisa per la popolazione massima raggiungibile; $x_n$ è quindi sempre minore di 1.
- il numero di individui presenti nella generazione $n+1$ sarà proporzionale a quelli presenti nella generazione $n$
- il numero di individui nella generazione $n+1$ sarà proporzionale alla risorse disponibili per la generazione $n$, quindi a $1 - x_n$

Quanto detto sopra mi fa pensare che una possibile legge per passare da $x_n$ a $x_{n+1}$ sia

$$x_{n+1} = R \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

che è la *mappa logisitica*

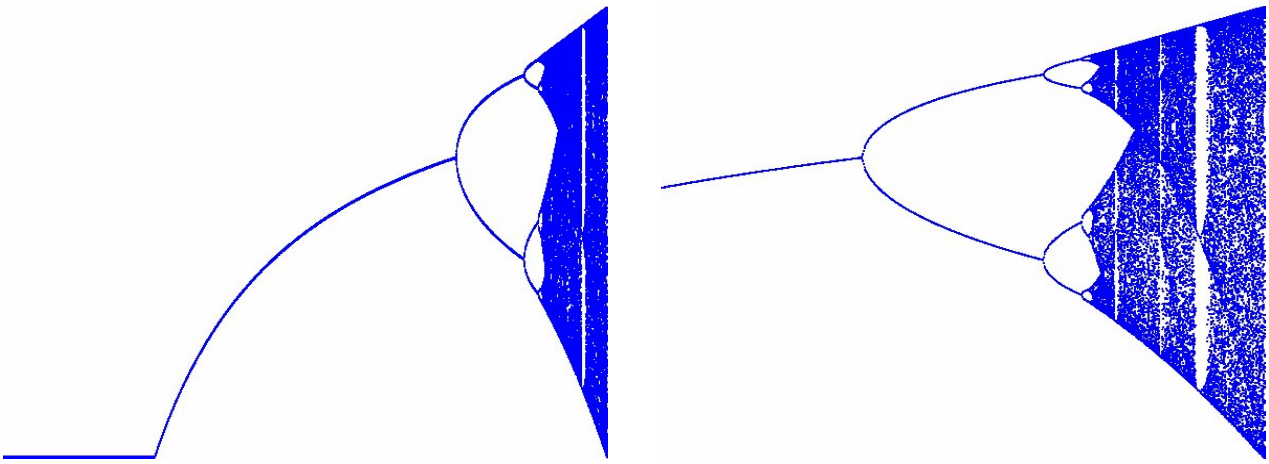
dato che $x \cdot (1-x)$ ha un massimo per $x = 1/2$, se $R \leq 4$ avrò sempre $x_n < 1$ e posso studiare questa mappa per $0 \leq R \leq 4$

Mi interessa la popolazione dopo un periodo transitorio:

- Raggiunge un valore limite oppure continua ad oscillare?
- C'è una dipendenza da $R$?
- Se oscilla, lo fa periodicamente opppure no?

Le risposte a queste domande si ottengono facendo evolvere la mappa per un gran numero di oscillazioni e poi plottando $x_n$ al variare di $R$ per molti $n$ successivi

Si osserva che inizialmente c'è un punto fisso, poi ci sono situazioni periodiche con periodi $2, 4, 8, 16, \ldots$ infine viene a mancare qualunque periodicità (caos)



Nella prima figura $R$ va da 0 a 4, nella seconda da 2.5 a 4.

# Esercizi

1. Considero la mappa definita da

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + k \cdot sin(x_n) \quad \text{mod} \quad 2\pi$$

   È caotica o integrabile al variare di $k$? Fare la sezione di Poincaré per diversi valori di $k$.

2. Nella mappa logisitica si ha raddoppio del periodo per certi valori $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ di $R$. Calcolare questi valori e cercare se esiste una relazione tra di loro.