Equazioni differenziali lineari

Un'equazione del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

è un'equazione differenziale del primo ordine e può essere risolta numericamente con una formula di ricorrenza. Il metodo più semplice consiste nel sostituire la derivata con il rapporto incrementale

$$(y(x+h) - y(x))/h = f(x, y(x))$$

da cui

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y(x))$$

In questo metodo (di Eulero) si sono trascurati termini $O(h^2)$ Per molte applicazioni questa precisione non è sufficiente

Metodo di Heun

La soluzione data da Eulero è altrettanto buona quanto

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x+h, y(x+h))$$

solo che non conosco $y(x+h)$. Posso allora calcolare $y(x+h)$ in approssimazione lineare con la formula di Eulero $y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y(x))$ e poi sostituire dentro l'equazione precedente. Trovo

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f\Big(x+h, y(x) + h \cdot f\big(x, y(x)\big)\Big)$$

Facendo ora la media tra questa equazione e quella che da' il metodo di Eulero ottengo

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} \cdot \Big(f(x, y(x)) + f\Big(x+h, y(x) + h \cdot f\big(x, y(x)\big)\Big)\Big)$$

che da' il metodo di Heun. Espandendo in potenze di h si vede che l'errore è $O(h^3)$. Infatti espandendo in serie di Taylor fino al 2^o ordine ottengo

$$y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) = y(x) + \frac{h}{2} \left(f(x, y(x)) + f(x, y(x)) + h \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \right)$$

$$= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} \frac{df(x, y(x))}{dx} = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x)$$

Metodi di Runge-Kutta

Possono avere precisioni diverse: i più comuni sono esatti fino al secondo e quarto ordine. Metodo al 2^o ordine

$$k_1 = h \cdot f\big(x, y(x)\big)$$
$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f\big(x + h/2, y(x) + k_1/2\big)$$

Sviluppando in serie di Taylor

$$y_{n+1} - y_n = h \cdot \frac{dy_n}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2 y_n}{dx^2} + O(h^3)$$
$$= h \cdot f_n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + y'_n \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) + O(h^3)$$
$$= h \cdot f_n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial y}\right) + O(h^3)$$
$$h \cdot f_n(x + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) = h \cdot \left(f_n + \frac{h}{2}\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{k_1}{2}\frac{\partial f_n}{\partial y}\right)$$
$$= h \cdot f_n + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial y}\right)$$

Si può procedere con ordini superiori al secondo. Per il quarto ordine la formula è

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\
k_2 &= h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}
\end{aligned}$$

Mi limito a dimostrare questa formula quando f non dipende da y

$$k_1 = h \cdot f(x_n) \quad k_2 = k_3 = h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}) \quad k_4 = h \cdot f(x_n + h)$$

$$\begin{aligned}
& y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_4) = \\
& \frac{h}{6} \cdot \left(f_n + 4 \cdot \left(f_n + \frac{h}{2} f'_n + \frac{h^2}{8} \cdot f''_n + \frac{h^3}{48} f'''_n + O\left(h^4\right) \right) \right) \\
& + \frac{h}{6} \cdot \left(f_n + h f'_n + \frac{h^2}{2} \cdot f''_n + \frac{h^3}{6} f'''_n + O\left(h^4\right) \right) \\
& = h f_n + \frac{h^2}{2} f'_n + \frac{h^3}{6} f''_n + \frac{h^4}{24} f'''_n + O(h^5) \\
& = h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + \frac{h^4}{24} y''''_n + O(h^5)
\end{aligned}$$

Questo metodo è un buon compromesso tra il numero di valutazioni della funzione e l'ampiezza di h.

Equazioni di ordine superiore al primo

Esempio: circuito elettrico

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = A\cos(\omega t)$$

definisco il vettore

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

Derivando $\vec{z}$ ottengo

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \\ \frac{A}{L}\cos(\omega t) - \frac{R}{L}\dot{q} - \frac{1}{LC}q \end{pmatrix}$$

che, riscritto per le componenti di $\vec{z}$, diventa

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \\ \frac{A}{L}\cos(\omega t) - \frac{R}{L}z_2 - \frac{1}{LC}z_1 \end{pmatrix}$$

Un' equazione scalare di ordine N si può ricondurre ad un'equazione vettoriale del primo ordine. In questo caso z_1 contiene la carica e z_2 la corrente

Equazioni di ordine N

Se ho un'equazione differenziale di ordine N della forma

$$y^{(N)}(x) = f\left(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(N-1)}(x)\right)$$

si può sempre trasformare in un'equazione vettoriale del primo ordine definendo un vettore

$$\vec{z} = \left(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(N-1)}\right)$$

in modo tale che l'equazione differenziale diventi

$$\frac{d\vec{z}}{dx} = \vec{g}\,(x, \vec{z})$$

con

$$\begin{aligned} g_1 &= z_2 \\ g_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ g_{N-1} &= z_N \\ g_N &= f\,(x, z_1, \ldots, z_N) \end{aligned}$$

Le regole di integrazione viste sopra si applicano componente per componente. L'integrazione viene fatta integrando, tutte le componenti per un passo, poi per il passo successivo, e non una componente per volta per molti passi.

Metodo di Numerov

Si applica a equazioni del tipo

$$y''(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \text{con} \qquad a(x) > 0$$

Scrivendo

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y''''(x) + O(h^5)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y''''(x) + O(h^5)$$

Sommando ottengo

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2y''(x) + \tfrac{h^4}{12}y''''(x) + O(h^6)$$

$$y''(x) = \tfrac{y(x+h)+y(x-h)-2y(x)}{h^2} - \tfrac{h^2}{12}y''''(x) + O(h^4)$$

Chiamo $y_n = y(x)$, $y_{n+1} = y(x+h)$, $y_{n-1} = y(x-h)$ e l'equazione precedente diventa

$$y_n'' = b_n - a_n y_n = \frac{y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n}{h^2} - \frac{h^2}{12} y''''(x) + O(h^4)$$

Derivando l'equazione differenziale due volte trovo un'altra espressione per la derivata quarta

$$y_n'''' = b_n'' - (a_n y_n)'' = \frac{(b_{n+1} + b_{n-1} - 2b_n)}{h^2} - \frac{a_{n+1} y_{n+1} + a_{n-1} y_{n-1} - 2a_n y_n}{h^2} + O(h^2)$$

Raccolgo i termini che moltiplicano y_n, y_{n+1}, y_{n-1} e ottengo

$$\frac{h^2}{12}(b_{n+1} + b_{n-1} + 10b_n) = \left(1 + \frac{h^2}{12} a_{n+1}\right) y_{n+1} + \left(1 + \frac{h^2}{12} a_{n-1}\right) y_{n-1} - 2\left(1 - \frac{5h^2}{12} a_n\right) y_n$$

Verifiche

Leggi di conservazione

Un'equazione del tipo

$$\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$$

ammette l'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + V(x(t))$$

come costante del moto. Controllare che l'energia finale sia uguale a quella iniziale (a meno di errori di troncamento) è una condizione necessaria. ma non sufficiente, perché il programma funzioni.

Inversione temporale

L'equazione precedente descrive, nel tempo t, una particella che si muove tra due punti A e B. Se parto dal punto B e inverto il segno della forza, devo arrivare ad A dopo lo stesso tempo t. Posso allora integrare avanti e indietro per un tempo t e vedere se sono tornato alle condizioni iniziali, utilizzando l'equazione

$$\ddot{x}(t) = +V'(x(t))$$

Esercizi

Pendolo che compie grandi oscillazioni

L'equazione del pendolo

$$y'' + \sin(y) = 0$$

viene approssimata di solito con

$$y'' + y = 0$$

approssimazione che è corretta per le piccole oscillazioni. Un test potrebbe essere misurare il periodo delle oscillazioni per le due equazioni con condizioni iniziali

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) = 0$$

al variare di y_0

Moto smorzato di un proiettile

In meccanica si studia la traiettoria di un proiettile lanciato in un campo gravitazionale con una certa velocità iniziale v_0 e soggetto alla sola forza di gravità. Se aggiungo una forza d'attrito proporzionale alla velocità $\vec{F} = -k\vec{v}$ come cambiano traiettoria e gittata?

$$\ddot{x}(t) = -k\dot{x}(t) \quad \ddot{y}(t) = -k\dot{y}(t) - g$$