

## Equazioni differenziali lineari

Un'equazione del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

è un'equazione differenziale del primo ordine e può essere risolta numericamente con una formula di ricorrenza. Il metodo più semplice consiste nel sostituire la derivata con il rapporto incrementale

$$(y(x+h) - y(x))/h = f(x, y(x))$$

da cui

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y(x))$$

In questo metodo (di Eulero) si sono trascurati termini  $O(h^2)$ . Per molte applicazioni questa precisione non è sufficiente.

## Metodo di Heun

La soluzione data da Eulero è altrettanto buona quanto

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x+h, y(x+h))$$

solo che non conosco  $y(x+h)$ . Posso allora calcolare  $y(x+h)$  in approssimazione lineare con la formula di Eulero

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x, y(x))$$

e poi sostituire dentro l'equazione precedente. Trovo

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x+h, y(x) + h \cdot f(x, y(x)))$$

Facendo ora la media tra questa equazione e quella che da' il metodo di Eulero ottengo

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} \cdot (f(x) + f(x+h, y(x) + h \cdot f(x, y(x))))$$

che da' il metodo di Heun. Espandendo in potenze di  $h$  si vede che l'errore è  $O(h^3)$ .

## Metodi di Runge-Kutta

Possono avere precisioni diverse: i più comuni sono esatti fino al secondo e quarto ordine. Metodo al 2° ordine

$$k_1 = h \cdot f(x, y(x))$$
$$y(x+h) = y(x) + h \cdot f(x+h/2, y(x) + k_1/2)$$

Sviluppando in serie di Taylor

$$y_{n+1} - y_n = h \cdot \frac{dy_n}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 y_n}{dx^2} + O(h^3)$$
$$= h \cdot f_n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{df_n}{dx} + y'_n \frac{df_n}{dy} \right) + O(h^3)$$
$$= h \cdot f_n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{df_n}{dx} + f_n \frac{df_n}{dy} \right) + O(h^3)$$
$$h \cdot f_n \left( x + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2} \right) = h \cdot \left( f_n + \frac{h}{2} \frac{df_n}{dx} + \frac{k_1}{2} \frac{df_n}{dy} \right)$$
$$= h \cdot f_n + \frac{h^2}{2} \left( \frac{df_n}{dx} + f_n \frac{df_n}{dy} \right)$$

Si può procedere con ordini superiori al secondo.

Per il quarto ordine la formula è

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\k_2 &= h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\end{aligned}$$

Mi limito a dimostrare questa formula quando  $f$  non dipende da  $y$

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(x_n) \quad k_2 = k_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \quad k_4 = h \cdot f(x_n + h) \\y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_4) = \\&= \frac{h}{6} f_n + \frac{2}{3} \left( f_n + \frac{h}{2} f'_n + \frac{h^2}{8} \cdot f''_n + \frac{h^3}{48} f'''_n + O(h^4) \right) \\&+ \frac{h}{6} \cdot \left( f_n + h f'_n + \frac{h^2}{2} \cdot f''_n + \frac{h^3}{6} f'''_n + O(h^4) \right) \\&= h f_n + \frac{h^2}{2} f'_n + \frac{h^3}{6} f''_n + \frac{h^4}{24} f'''_n + O(h^5) \\&= h y'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + \frac{h^4}{24} y''''_n + O(h^5)\end{aligned}$$

Questo metodo è un buon compromesso tra il numero di valutazioni della funzione e l'ampiezza di  $h$ .

## Equazioni di ordine superiore al primo

Esempio: circuito elettrico

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = A \cos(\omega t)$$

definisco il vettore

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

Derivando  $\vec{z}$  ottengo

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \frac{A}{L} \cos(\omega t) - \frac{R}{L} \dot{q} - \frac{1}{LC} q \end{pmatrix}$$

che, riscritto per le componenti di  $\vec{z}$ , diventa

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ \frac{A}{L} \cos(\omega t) - \frac{R}{L} z_2 - \frac{1}{LC} z_1 \end{pmatrix}$$

Un' equazione scalare di ordine  $N$  si può ricondurre ad un'equazione vettoriale del primo ordine. In questo caso  $z_1$  contiene la carica e  $z_2$  la corrente

## Equazioni di ordine N

Se ho un'equazione differenziale di ordine  $N$  della forma

$$y^{(N)}(x) = f\left(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(N-1)}(x)\right)$$

si può sempre trasformare in un'equazione vettoriale del primo ordine definendo un vettore

$$\vec{z} = \left(y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N-1)}\right)$$

in modo tale che l'equazione differenziale diventi

$$\frac{d\vec{z}}{dx} = \vec{g}(x, \vec{z})$$

con

$$\begin{aligned} g_1 &= z_2 \\ g_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ g_{N-1} &= z_N \\ g_N &= f(x, z_1, \dots, z_N) \end{aligned}$$

Le regole di integrazione viste sopra si applicano componente per componente. L'integrazione viene fatta integrando, tutte le componenti per un passo, poi per il passo successivo, e non una componente per volta per molti passi.

## Metodo di Numerov

Si applica a equazioni del tipo

$$y''(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{con} \quad a(x) > 0$$

Scrivendo

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y''''(x) + O(h^5)$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y''''(x) + O(h^5)$$

Sommando ottengo

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2y''(x) + \frac{h^4}{12}y''''(x) + O(h^6)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) + y(x-h) - 2y(x)}{h^2} - \frac{h^2}{12}y''''(x) + O(h^4)$$

Chiamo  $y_n = y(x)$ ,  $y_{n+1} = y(x + h)$ ,  $y_{n-1} = y(x - h)$  e l'equazione precedente diventa

$$y_n'' = b_n - a_n y_n = \frac{y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n}{h^2} - \frac{h^2}{12} y''''(x) + O(h^4)$$

Derivando l'equazione differenziale due volte trovo un'altra espressione per la derivata quarta

$$y_n'''' = b_n'' - (a_n y_n)'' = \frac{(b_{n+1} + b_{n-1} - 2b_n)}{h^2} - \frac{a_{n+1} y_{n+1} + a_{n-1} y_{n-1} - 2a_n y_n}{h^2} + O(h^2)$$

Raccolgo i termini che moltiplicano  $y_n$ ,  $y_{n+1}$ ,  $y_{n-1}$  e ottengo

$$h^2 (b_{n+1} + b_{n-1} + 10b_n) = \left(1 + \frac{h^2}{12} a_{n+1}\right) y_{n+1} + \left(1 + \frac{h^2}{12} a_{n-1}\right) y_{n-1} - 2 \left(1 - \frac{5h^2}{12} a_{n+1}\right) y_n$$



## Esercizi

### 1. Il pendolo: soluzione esatta

L'equazione del pendolo

$$y'' + \sin(y) = 0$$

viene approssimata di solito con

$$y'' + y = 0$$

e si dice che l'approssimazione sia corretta per le piccole oscillazioni. Un test potrebbe essere misurare il periodo delle oscillazioni per le due equazioni con condizioni iniziali

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) = 0$$

al variare di  $y_0$  e vedere se il periodo effettivamente non dipende da  $y_0$ .

### 2. Proiettile con attrito

In meccanica si studia la traiettoria di un proiettile lanciato in un campo gravitazionale con una certa velocità iniziale  $v_0$  e soggetto alla sola forza di gravità. Se aggiungo una forza d'attrito proporzionale alla velocità  $\vec{F} = -k\vec{v}$  come cambiano traiettoria e gittata?

$$\ddot{x}(t) = -k\dot{x}(t) \quad \ddot{y}(t) = -k\dot{y}(t) - g$$

# Caos

- L'energia è sempre conservata;
- un sistema bidimensionale è descritto da  $x, y, p_x, p_y$  o comunque da quattro coordinate canoniche;
- l'esistenza di una costante del moto limita lo spazio della fasi accessibile a  $D = 3$ ;
- se considero i punti con  $x = 0$  avrò un insieme con  $D = 2$  per ogni traiettoria;
- se l'energia è l'unica costante del moto il sistema si dice ergodico;
- se esiste una seconda costante del moto la dimensione di questo insieme si abbassa di uno e l'insieme stesso si riduce ad una linea: il sistema si dice integrabile;
- esempi possibili: potenziali  $V(x, y)$  e mappe  $T : (x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$

## Sezioni di Poincaré

- Pongo certe condizioni iniziali;
- integro le equazioni del moto;
- seleziono i punti per cui la traiettoria attraversa una certa superficie (ad esempio  $x = 0$ ) e li stampo  $(y, p_y)$ ;
- ripeto per diverse condizioni iniziali fino a riempire lo spazio delle fasi;
- le traiettorie che occupano un'area sono caotiche, quelle che stanno su una linea integrabili;
- per valori particolari (risonanze) le linee si possono ridurre a un punto o a un numero finito di punti;

## Hamiltoniana di Hénon

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

posso usare i metodi di Eulero o Runge-Kutta.  
Metodi precisi sono qui molto utili;

Energia nel range  $0 - 1/6$ ;

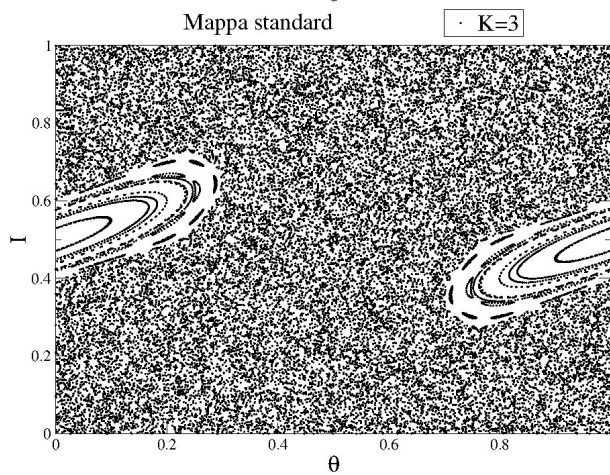
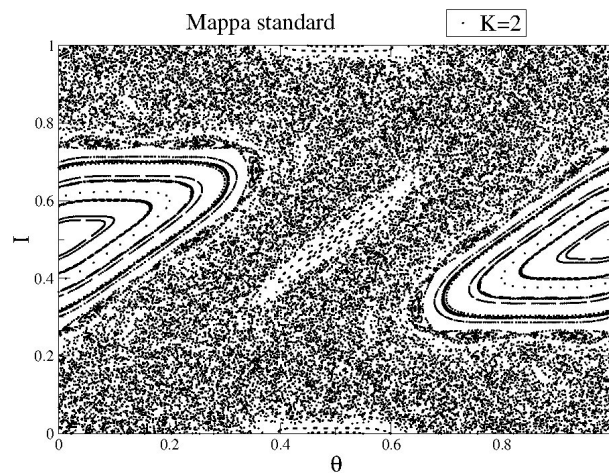
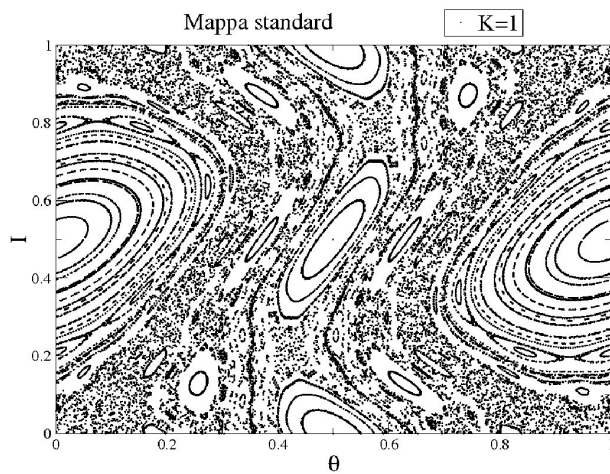
Visualizzo il piano  $x = 0$  usando le  
coordinate  $(y, p_y)$ ;

controllo sempre la conservazione dell'energia;

# Mappa standard

$$I_{n+1} = I_n + K \cdot \sin(\theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}$$



# Calcolo della sezione di Poincaré per l'hamiltoniana di Hénon

1. Scrivete l'hamiltoniana;
2. scrivete le equazioni del moto;
3. integrate con un metodo preciso le equazioni del moto per una particolare scelta delle condizioni iniziali;
4. verificate la conservazione dell'energia, anche come criterio per terminare l'integrazione;
5. scegliete un insieme ragionevole di condizioni iniziali  $(x, p_x)$ : notate che il potenziale ha un punto di sella che si può trovare risolvendo  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ ; l'energia deve stare sotto il corrispondente valore vicino a  $x = y = 0$ ;
6. selezionate una superficie (esempio:  $x = 0$ ) e un segno dell'impulso (esempio:  $p_x > 0$ ) e fate il grafico; usate punti non collegati da linee.