Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier

$$F(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iqx} dx$$

può essere discretizzata dando

$$F(q) \approx \Delta x \sum_{j=0}^{\infty} f(x_j) e^{-iqx_j}$$

Posso integrare tra $-L/2$ e $L/2$ e troncare la somma dopo N termini e avrei quindi con $x_j = -L/2 + j\Delta x$ e $x_N = L/2$ da cui

$$N\Delta x = L \quad \Delta x = L/N$$

Scelgo ora i valori degli impulsi per cui voglio calcolare la trasformata. Un intervallo simmetrico $[-q_0, q_0]$ opportuno fa al caso mio. Sia Δq l'incremento dell'impulso che mi da'

$$q_k = -q_0 + k\Delta q \quad 2q_0 = N\Delta q$$

L'argomento immaginario dell'esponente diventa

$$(-q_0 + k\Delta q) \cdot (-L/2 + j\Delta x) =$$
$$-q_0 L/2 + k\Delta q L/2 + j\Delta x q_0 + \Delta q \Delta x$$

Scelgo ora

$$q_0 = \frac{2\pi}{L} N$$

e trovo

$$\frac{L}{2}\Delta q = \frac{L}{2}\frac{2q_0}{N} = 2\pi\ \Delta x q_0 = \frac{L}{N} q_0 = 2\pi\ q_0 L/2 = \pi N$$

mentre

$$\Delta q \Delta x = \frac{q_0}{N}\frac{L}{N} = \frac{2\pi}{N}$$

e la trasformata di Fourier diventa

$$F_k = F(q_k) = cost \cdot \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\,2\pi k j/N} f_j$$

È meglio fissare la costante in modo che sia soddisfatto il teorema di Parseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |f_j|^2$$

che da' per la costante il valore $1/N$. In pratica si definisce la FT diretta come

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\,2\pi k j/N} f_j$$

e quella inversa come

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\,2\pi kj/N} f_j$$

- La definizione del segno dell'esponente varia però da autore ad autore
- Invece di posizione/impulso il linguaggio usato è spesso tempo/frequenza
- due approssimazioni: discretizzo l'integrale e taglio le frequenze
- discretizzare porta via informazione (frequenza di Nyquist);

Se $F_k = 0$ per frequenze $|f_k| > f_c = \frac{1}{2\Delta}$ la trasformata di Fourier non perde informazione, altrimenti tutto ciò che sta a $|f_k| > f_c$ si sposta nella regione $|f_k| < f_c$ con effetti imprevedibili, ed è necessario un campionamento più fine

FT discreta

Teoricamente occorrono N^2 moltiplicazioni e altrettante somme per calcolare la DFT

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi kj/N} f_j = \sum_{j=0}^{N-1} W^{kj} f_j \quad W = e^{-i2\pi/N}$$

Posso però spezzare la somma in due parti

$$F_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k(2m)}{N}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k(2m+1)}{N}}$$

$$F_k = \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi km}{N/2}} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} f_{2m+1} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi km}{N/2}}$$

$$F_k = F_k^{(e)} + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} F_k^{(o)} = F_k^{(e)} + W^k F_k^{(o)}$$

Ho due trasformate di Fourier di $N/2$ punti ciascuna, che posso memorizzare rispettivamente nei primi $N/2$ e nei secondi $N/2$ elementi.

$$W^k = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - \mathrm{i}\ \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

L'angolo $\frac{2\pi k}{N}$ raddoppia quando N si dimezza

Procedimento ricorsivo

Definisco $F_k^e = F_{2k}$ e $F_k^o = F_{2k+1}$.

- mi sono ridotto a fare due trasformate di Fourier di $N/2$ punti.
- dove memorizzo F_k^e e F_k^o?
- nelle successive ricorrenze ho $F_k^{eoeeooe}$
- c'è una relazione tra la sequenza pari-dispari e k?
- sostituisco e con zero e o con uno e ottengo un numero binario j
- cerco una relazione tra k e j

Inversione di bit

Scrivo k come numero binario

- Se k è pari va nella metà inferiore, quindi $j < N/2$;
- se k è pari ha il bit inferiore nullo;
- se $j < N/2$, j ha il bit più alto nullo;
- se $k/2$ è dispari, va nel quarto superiore della metà inferiore, e il secondo bit dal basso è uno;
- quindi $N/4 \leq j \leq N/2 - 1$, e il secondo bit dall'alto è uno;
- in generale j si ottiene da k scambiando l'ordine dei bit.

N^o	bit	bit inversi	bit-inverso
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

nel caso di due soli punti

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

Inoltre da

$$F_k = F_k^e + e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} F_k^{(o)}$$

ho

$$F_{k+N/2} = F_k^e - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{N}} F_k^{(o)}$$

che mi permette di calcolare F_k con $0 \leq k \leq N-1$ conoscendo $F^{(e)}$ e $F^{(o)}$ per $0 \leq k \leq N/2-1$.

Infine devo calcolare $\cos(\frac{2\pi k}{N})$ e $\sin(\frac{2\pi k}{N})$ per diversi k e lo stesso N. Il calcolo delle funzioni trigonometriche è dispendioso in termini di tempo

$$\begin{aligned} \cos(\frac{2\pi(k+1)}{N}) = & \cos(\frac{2\pi k}{N})\cos(\frac{2\pi}{N}) \\ - & \sin(\frac{2\pi k}{N})\sin(\frac{2\pi}{N}) \end{aligned}$$

e analogamente per $\sin(\frac{2\pi(k+1)}{N})$, per cui riconduco i calcoli successivi a somme e moltiplicazioni.

Funzione spettrale

Per una data grandezza $f(t)$ periodica posso calcolare o misurare l'autocorrelazione

$$C(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t+\tau)\cdot f(t)$$

Il teorema di Wiener-Kinchine mi dice allora che

$$S(\nu) = FT(C(t)) = FT(f(t))^2$$

dove $S(\nu)$ è la funzione spettrale, una grandezza che mi permette di evidenziare il contenuto in frequenza (o energia) di una grandezza fisica.

la trasformata di Fourier discreta esiste anche quando non ha senso parlare di quella continua.

- funzioni periodiche nel tempo (serie di Fourier);
- segnali random a tempi costanti (correlazioni);

Esercizi

- La trasformata di Fourier di $e^{-x^2/2}$ è $e^{-q^2/2}$.
- calcolare la FT di un oscillatore armonico con $\omega = 1$ e la sua funzione spettrale;
- vedere come cambiano le cose se

$$V(x) = x^4/4 - x^2/2$$