

# Ricorrenza

## Il problema dei conigli

*Un allevatore compra una coppia di conigli appena nati. Dopo due mesi i conigli sono in grado di riprodursi, dando vita ad un'altra coppia di conigli; questa può riprodursi dopo altri due mesi. Supponendo che nessun coniglio muoia, qual è il numero totale delle coppie di conigli dopo  $N$  mesi?*

la successione del numero di coppie è

$$1, 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5, \dots$$

e, in generale

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad \text{con} \quad u_0 = 1 \quad \text{e} \quad u_1 = 1$$

Si può affrontare il problema al calcolatore in due modi

- mettere tutti i numeri in un vettore (se non sono troppi)
- applicare la formula spostando  $n$

Esempio 1

$u[0]=1$

$u[1]=1$

per  $n$  che va da 2 a  $N$

$$u[n]=u[n-1]+u[n-2]$$

ripeti

Esempio 2

$unm2=1$

$unm1=1$

per  $n$  che va da 2 a  $N$

$$un = unm1 + unm2$$

$$unm2 = unm1$$

$$unm1 = un$$

ripeti

## Formula di Binet

Cerco una successione come quella di Fibonacci ma fatta a potenza

$$q^N = q^{N-1} + q^{N-2}$$

che implica

$$q^2 + q = 1$$

e che ha due soluzioni

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

scrivo

$$u_N = c_1 \cdot q_1^N + c_2 \cdot q_2^N$$

con

$$c_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

Poiché  $|c_2| < 1$ , per  $N \rightarrow \infty$  il contributo di  $q_2^N$  scompare e  $u_N \approx c_1 \cdot q_1^N$ , e  $u_{N+1}/u_N \rightarrow \alpha$  dove  $\alpha$  è la sezione aurea

## Polinomi ortogonali

Molti polinomi sono importanti per la Fisica. Spesso li caratterizza una relazione di ricorrenza che permette anche di calcolarli.

1. • Polinomi di Legendre
  - $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$
  - $(N + 1) P_{N+1}(x) = (2N + 1) x P_N(x) - N P_{N-1}(x)$
2. • Polinomi di Hermite
  - $H_0(x) = 1, H_1(x) = x$
  - $H_{N+1}(x) = 2 \cdot x H_N(x) - 2 \cdot N \cdot H_{N-1}(x)$
3. • Polinomi di Laguerre
  - $L_0^a(x) = 1, L_1^a(x) = 1 + a - x$
  - $(N + 1) L_{N+1}^a(x) = (2N + 1 + a - x) \cdot L_N^a(x) - (N + a) \cdot L_{N-1}^a(x)$
4. • Polinomi di Chebychev
  - $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$
  - $T_{N+1}(x) = 2 \cdot x \cdot T_N(x) - T_{N-1}(x)$

## Integrali dei polinomi

1.

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x) = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}$$

3.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n^a(x)L_m^a(x) = \delta_{nm} \frac{\Gamma(n+a+1)}{n!}$$

4.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{nm} \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \delta_{nm}\pi \quad \text{se } n \text{ è } 0$$

## Funzioni associate di Legendre

Sono importanti nel calcolo delle armoniche sferiche

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}$$

$P_l^m$  sono le *funzioni associate di Legendre*. Per  $m = 0$  si trovano i polinomi di Legendre. Posso calcolarle tramite una relazione di ricorrenza

$$1. P_m^m(x) = (-1)^m (2m-1)!! (1-x^2)^{m/2}$$

$$2. P_{m+1}^m(x) = (2m+1)x P_m^m(x)$$

$$3. (l-m)P_l^m(x) = (2l-1)x P_{l-1}^m(x) - 2cm - (l-m+1)P_{l-2}^m(x)$$

## Funzioni di Bessel e ricorsione inversa

Le funzioni di Bessel sferiche possono essere definite da

$$j_0(x) = \sin(x)/x \quad j_1(x) = \sin(x)/x^2 - \cos(x)/x$$

$$j_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n-1}(x)$$

Se  $x$  è piccolo,  $(2n+1)/x \gg 1$ . Cosa succede in una ricorrenza in cui

$$u_{n+1} = K u_n - u_{n-1}$$

con  $K \gg 1$ ? Cerco la risposta in una ricorrenza della forma

$$q^{n+1} = K q^n - q^{n-1} \quad q^2 - K q + 1 = 0$$

che ha soluzione

$$q_{\pm} = (K \pm \sqrt{K^2 - 4})/2$$

che dà circa

$$q_+ = K \quad q_- = \frac{1}{K}$$

e quindi

$$u_n = A_+ q_+^n + A_- q_-^n$$

Se  $A_+ = 0$ , basta un piccolo errore numerico perché la soluzione corrispondente a  $q_+$  prevalga comunque. Per ovviare a questo inconveniente parto da  $u_n$  e faccio la ricorsione all'indietro

$$u_0 = A_+ / q_+^n + A_- / q_-^n$$

che fa prevalere il termine che dipende da  $q_-$ .  
In pratica considero la formula inversa

$$j_{n-1}(x) = \frac{2n+1}{x} j_n(x) - j_{n+1}(x)$$

con valori iniziali  $j_N(x)$  e  $j_{N-1}(x)$  casuali e  $N \gg n$ . Imponendo il giusto valore di  $j_0(x)$  troverò anche  $j_n(x)$ .



## Esercizio

Considero il potenziale generato da una distribuzione di carica così fatta:

$$\rho = \rho_0 \cos^4(\theta) \text{ per } r \leq R_0 \text{ e } \rho = 0 \text{ per } r > R_0$$

attorno alla direzione di un certo asse.

Il potenziale sull'asse è allora

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} r'^2 dr' \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\rho_0 \cos^4(\theta)}{z^2 \sqrt{1 - (r'/z) \cos(\theta) + (r'^2/z^2)}}$$

$$V(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 z^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R_0^{l+3}}{(l+3)z^l} \int_{-1}^{+1} dx x^4 P_l(x)$$

Fare un grafico dell'andamento di  $\epsilon_0 V(z)/\rho_0$  al variare di  $z$  includendo i vari termini di multipolo e prendendo  $R_0 = 1 \text{ cm}$