## Interpolazione e Approssimazione

Dato un insieme di punti di ascisse e ordinate $(x_j, f_j)$ mi serve qualche volta di avere a disposizione una funzione, di solito con proprietà particolari, che passi per tutti questi punti. La funzione che passa per $N$ punti non è certo unica, ed il procedimento di trovare una di queste funzioni è detto **interpolazione**

## Metodo di Lagrange

Un metodo semplice per interpolare $N$ punti è quello dei polinomi di Lagrange. Per fare un esempio il polinomio che passa per tre punti può essere scritto come

$$P(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Per un numero di punti grande (per esempio 20) il polinomio oscilla paurosamente e non rappresenta più, con ogni probabilità, l'andamento di una funzione fisicamente significativa.

## Metodo di Aitken

- Cerco un metodo efficiente per calcolare il polinomio di Lagrange che interpola $N$ punti

- Suppongo di avere trovato i polinomi $P_{0\ldots N-2}(x)$ e $P_{1\ldots N-1}(x)$ che interpolano i punti $0\ldots N-2$ e $1\ldots N-1$. Allora il polinomio

  $$P_{0\ldots N-1} = \frac{(x - x_{N-1})P_{0\ldots N-2} + (x_0 - x)P_{1\ldots N-1}}{x_0 - x_{N-1}}$$

  interpola gli $N$ punti

- Posso allora utilizzare delle formule di ricorrenza per calcolare i polinomi a $J$ punti quando conosco quelli a $J-1$ punti

- Comincio col calcolare i polinomi di ordine zero, per i quali

  $$P_i(x) = f_i$$

- Poi calcolo le interpolazioni lineari

$$P_{i,i+1}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1}(x) + (x_{i+1} - x)P_i(x)}{x_i - x_{i+1}}$$

- $P_{i,i+1}(x)$ può essere memorizzato al posto di $P_i(x)$ dato che quest'ultimo non viene più utilizzato

- Si può ora ripetere il procedimento con polinomi di grado via via maggiore

## Spline cubiche

Voglio una funzione che sia almeno continua con derivate prime e seconde; in ogni intervallo $[x_{j-1}, x_j]$ chiedo che la funzione sia un polinomio di terzo grado. Nei punti estremi devo imporre le condizioni di continuità per la funzione e le sue derivate prime e seconde

La funzione è cubica, quindi le sue derivate sono lineari. Chiamo $M_j$ le derivate seconde in $x_j$. Allora

$$s_j''(x) = M_{j-1}\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-1}} + M_j\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$$

Posto $h_j = x_j - x_{j-1}$

$$s_j'(x) = -M_{j-1}\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + C_j$$

$$\begin{aligned} s_j(x) \ &= M_{j-1}\tfrac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\tfrac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} \\ &+ C_j(x - x_{j-1}) + E_j \end{aligned}$$

## Condizioni ai limiti

Devo imporre

$$s(x_{j-1}) = f_{j-1} \quad \text{e} \quad s(x_j) = f_j$$

e quindi

$$f_{j-1} = M_{j-1}\frac{h_j^2}{6} + E_j$$

$$f_j = M_j\frac{h_j^2}{6} + C_j h_j + E_j$$

$$E_j = f_{j-1} - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6}$$

$$C_j = \frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1})$$

Impongo ora che la spline nell'intervallo $j$ si raccordi con quella nell'intervallo $j+1$. Questo è già vero per la funzione (avendo imposto che sia uguale a $f_{j-1}$ e $f_j$ agli estremi) e per le derivate seconde (avendo scelto $M_j$ in modo indipendente dall'intervallo). Rimane da imporre la continuità delle derivate prime.

## Continuità delle derivate

In $x_j$

$$M_j\frac{h_j}{2}+C_j=-M_j\frac{h_{j+1}}{2}+C_{j+1}$$

$$M_j\frac{h_j}{2}+\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}-\frac{h_j}{6}(M_j-M_{j-1})=$$

$$-M_j\frac{h_{j+1}}{2}+\frac{f_{j+1}-f_j}{h_{j+1}}-\frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1}-M_j)$$

Scrivendo questa come equazione per gli $M_j$ ottengo

$$l_jM_{j-1}+2M_j+u_jM_{j+1}=y_j$$

con

$$l_j=\frac{h_j}{h_j+h_{j+1}}\quad u_j=\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}}$$

$$y_j=\frac{6}{h_j+h_{j+1}}\left(\frac{f_{j+1}-f_j}{h_{j+1}}-\frac{f_j-f_{j-1}}{h_j}\right)$$

Si possono anche imporre le due condizioni

$$2M_1+u_1M_2=y_1\quad l_NM_{N-1}+2M_N=y_N$$

che è l'equazione lineare associata ad una matrice tridiagonale

## Matrici tridiagonali

Una matrice che abbia elementi $a_{ij}$ diversi da zero solo per $j = i, i \pm 1$ si dice tridiagonale. La matrice ctridiagonale può essere memorizzata in tre array di dimensione al più $N$ ed è particolarmente facile scomporla con un procedimento LU.

$$\begin{pmatrix} d_1 & u_1 & 0 & 0 \\ l_2 & d_2 & u_2 & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & u_3 \\ 0 & 0 & l_4 & d_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2^{'} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_3^{'} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_4^{'} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^{'} & u_1^{'} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{'} & u_2^{'} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{'} & u_3^{'} \\ 0 & 0 & 0 & d_4^{'} \end{pmatrix}$$

L'equazione si risolve facilmente osservando che $u_j^{'} = u_j$ e $d_1^{'} = d_1$ le altre equazioni danno

$$l_2^{'} = l_2/d_1^{'} \quad d_2^{'} = d_2 - l_2^{'} u_1^{'}$$

e, in generale,

$$l_j^{'} = l_j/d_{j-1}^{'} \quad d_j^{'} = d_j - l_j^{'} u_{j-1}^{'}$$

A questo punto l'equazione lineare può essere risolta per doppia backsubstitution

## Approssimazione

Se $f(x)$ è difficile da calcolare (impiega molto tempo) e mi servono i suoi valori solo con una certa precisione

Uso i polinomi di Chebychev

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{N} c_j T_{j-1}(x)$$

$$c_j = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \cos((j-1)x_k) \qquad x_k = \frac{\pi(k - \frac{1}{2})}{N}$$