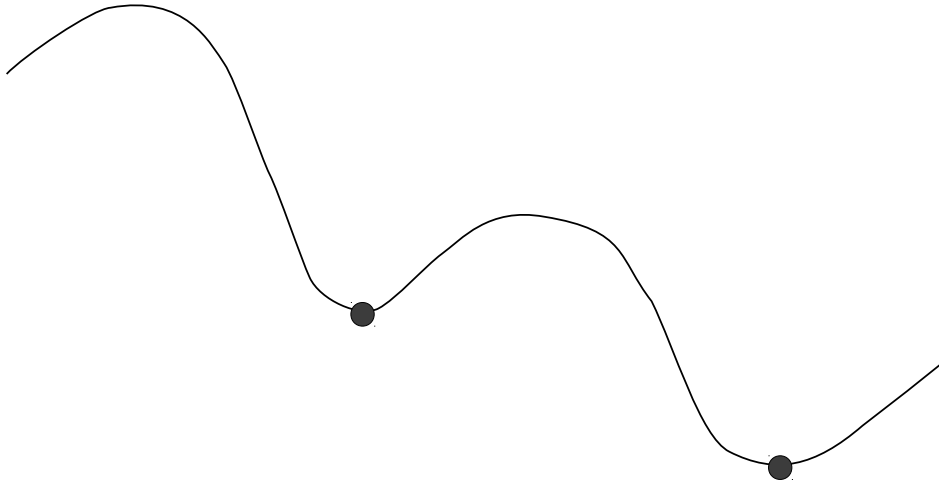


Minimi di una funzione



- Esistono minimi locali ($f'(x) = 0$) e globali: mi interessa soprattutto trovare questi ultimi
- i minimi di $f(x)$ sono i massimi di $-f(x)$, quindi gli algoritmi per trovare minimi e massimi sono i medesimi
- Non si può trovare un minimo con la stessa precisione di una radice
- Alcuni metodi, una volta isolato il minimo, restringono la ricerca per successive divisioni di un intervallo
- Altri, come l'interpolazione parabolica cercano di estrapolare velocemente al minimo
- La situazione è in parte analoga alla ricerca di radici con il metodo della bisezione o con quello di Newton.

Precisione

In prossimità del minimo vale l'approssimazione parabolica:

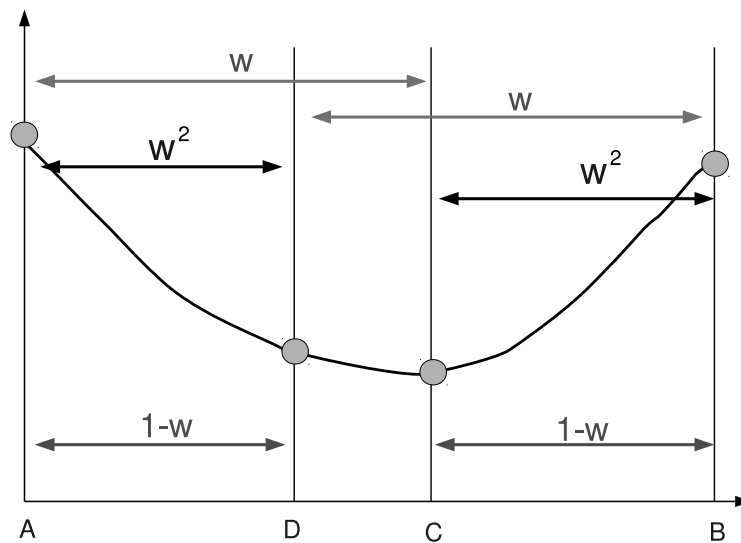
$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$

Se $f(x)$ è nota con precisione ε

$$\|x - x_0\| = \sqrt{2\varepsilon / f''(x_0)}$$

Se la precisione della macchina è 10^{-12} il minimo non può essere trovato con precisione superiore a circa 10^{-6}

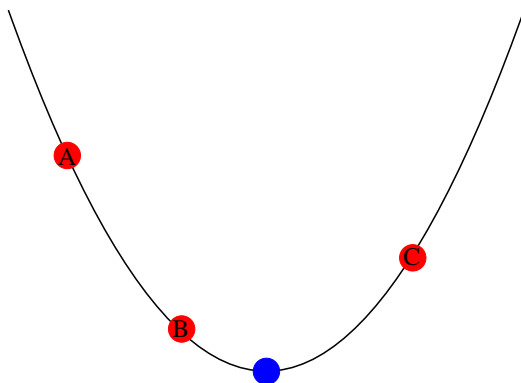
Ricerca aurea



$$f_C \leq f_A \quad \text{e} \quad f_C \leq f_B \quad AB = 1$$

- Ho trovato un minimo se conosco tre punti A , B e C per cui:
 $x_A < x_C < x_B$, $f(x_A) > f(x_C)$
e $f(x_B) > f(x_C)$
- C dista $w > 0.5$ da A e $1 - w$ da B
- Cerco una scelta ottimale per w , cioè una scelta che restringa ad ogni passo di un fattore w l'intervallo in cui cercare il minimo
- Prendo D tale che $AC = DB = w \cdot AB$
- Il minimo si può ora trovare tra A e C oppure tra D e B
- Se $[A, C]$ è il nuovo intervallo $AD/AC = AC/AB$ per avere autosimilarità
- $w^2 = 1 - w$ e quindi $w = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ è la sezione aurea

Interpolazione parabolica



Suppongo di essere abbastanza vicino al minimo. La funzione $f(x)$ può essere approssimata abbastanza bene come

$$f(x) \approx P + Q \cdot (x - x_0)^2$$

Trovare x_0 vuole quindi dire trovare il minimo se è esatta questa ipotesi; inoltre la procedura è molto più veloce della ricerca aurea

$$P + Q \cdot (A - x_0)^2 = f_A$$

$$P + Q \cdot (B - x_0)^2 = f_B$$

$$P + Q \cdot (C - x_0)^2 = f_C$$

Sottraendo le equazioni a due a due mi libero di P :

$$Q \cdot [(A - x_0)^2 - (B - x_0)^2] = f_A - f_B$$

$$Q \cdot [(B - x_0)^2 - (C - x_0)^2] = f_B - f_C$$

Facendo il rapporto elimino Q

$$\frac{(A - x_0)^2 - (B - x_0)^2}{(B - x_0)^2 - (C - x_0)^2} = \frac{f_A - f_B}{f_B - f_C}$$

ovvero

$$\frac{A^2 + x_0^2 - 2Ax_0 - B^2 - x_0^2 + 2Bx_0}{B^2 + x_0^2 - 2Bx_0 - C^2 - x_0^2 + 2Cx_0} = \frac{f_A - f_B}{f_B - f_C}$$

$$\frac{A^2 - B^2 + 2(B - A)x_0}{B^2 - C^2 + 2(C - B)x_0} = \frac{f_A - f_B}{f_B - f_C}$$

$$\begin{aligned} (A^2 - B^2 + 2(B - A)x_0) (f_B - f_C) &= \\ (B^2 - C^2 + 2(C - B)x_0) (f_A - f_B) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A^2 - B^2)(f_B - f_C) + (B^2 - C^2)(f_B - f_A) = \\ & 2 \cdot x_0 \cdot [(C - B)(f_A - f_B) + (B - A)(f_C - f_B)] \end{aligned}$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(A^2 - B^2)(f_B - f_C) + (B^2 - C^2)(f_B - f_A)}{[(C - B)(f_A - f_B) + (B - A)(f_C - f_B)]}$$

Simulated annealing

- Minimi di funzioni di molte variabili;
- Mi serve un buon minimo relativo piuttosto che il minimo assoluto
- Analogia con la cristallizzazione per raffreddamento
- Il problema ha troppi gradi di libertà per una soluzione diretta
- Il metodo migliore per trovare il minimo è aspettare che il sistema se lo trovi da solo!
- Concetto di simulazione.

Il problema del commesso viaggiatore

Un commesso viaggiatore deve visitare N città e vuole spendere il meno possibile in benzina. Gli occorre quindi conoscere il percorso più corto che tocca tutte le città una sola volta.

Ci sono $N!$ possibili percorsi. Il percorso è funzione delle posizioni di tutte le città e quindi di $2N$ variabili. Trovare il minimo è impossibile con i metodi tradizionali. Devo quindi accontentarmi di un minimo relativo abbastanza buono.

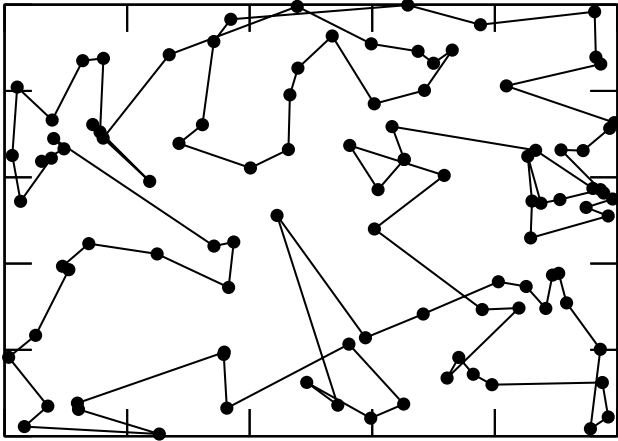
Se la benzina costasse poco, non farebbe una gran differenza quale percorso si sceglie. Potrei allora esplorare vari percorsi e, quando il prezzo sale, utilizzare quello più corto che ho trovato.

Ci sono analogie tra il commesso e un cristallo

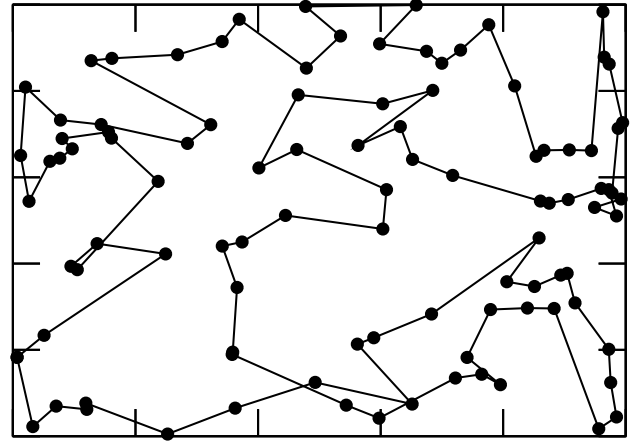
- (a) Benzina più economica = temperatura più alta.
- (b) Percorso più corto = stato fondamentale del cristallo
- (c) Città = molecole

Strategia da usare

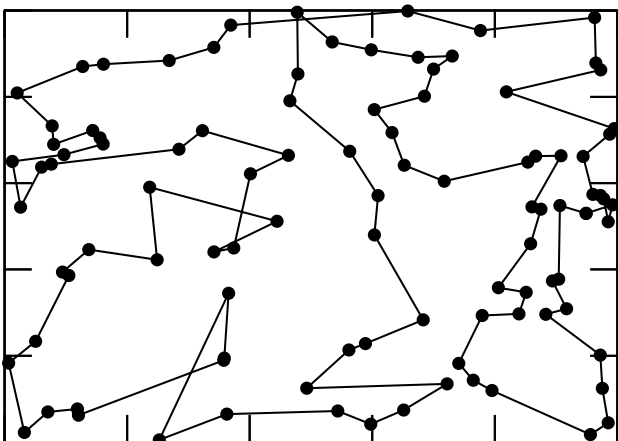
- Per la formazione del cristallo il raffreddamento deve essere lento, quindi devo far salire lentamente il prezzo della benzina
- Esploro un percorso: se è più corto di quello che conosco lo prendo per buono
- Se è più lungo però non lo scarto sempre, per evitare di restare in un minimo locale
- Un percorso cattivo ha una probabilità di essere accettato tanto minore quanto maggiore è l'aumento di percorso
- Un cattivo percorso può essere accettato più facilmente se la benzina costa poco (temperatura alta)
- In analogia con la meccanica statistica, *energia = lunghezza del percorso*.
La probabilità di accettare un cambiamento di energia sfavorevole è $\exp(-E/T)$



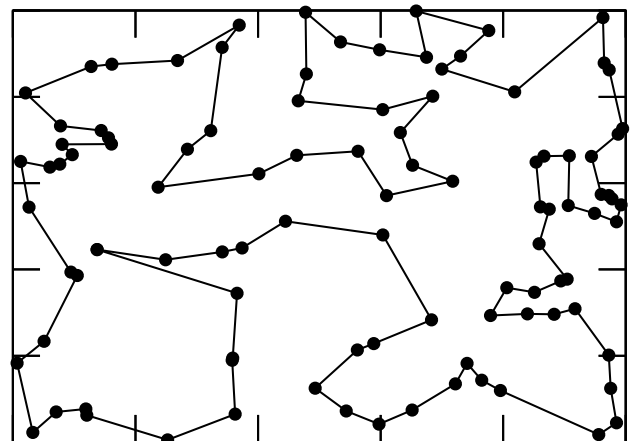
100



200



300



1000