

Equazioni differenziali parziali

Sono di due tipi

- di evoluzione temporale

- equazione delle onde (iperbolica)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- equazione della diffusione (parabolica)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

- statiche

- equazione di Poisson (ellittica)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$$

Nel secondo caso discretizzo x e y a intervalli regolari

$$x = x_0 + j\Delta \quad y = y_0 + l\Delta \quad 0 \leq j \leq J \quad 0 \leq l \leq L$$

discretizzo le derivate

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1,l} - 2u_{j,l} + u_{j-1,l}}{\Delta^2}$$

per cui l'equazione diventa

$$\frac{u_{j+1,l} - 2u_{j,l} + u_{j-1,l}}{\Delta^2} + \frac{u_{j,l+1} - 2u_{j,l} + u_{j,l-1}}{\Delta^2} = \rho_{j,l}$$

e moltiplicando per Δ^2 trovo

$$u_{j+1,l} - 2u_{j,l} + u_{j-1,l} + u_{j,l+1} - 2u_{j,l} + u_{j,l-1} = \Delta^2 \rho_{j,l}$$

mentre per $j = 0, J$ $l = 0, L$ devo dare le condizioni al contorno.

La mia equazione differenziale ha ora assunto la forma di un'equazione matriciale

$$A\vec{u} = \vec{b}$$

La soluzione può rivelarsi ardua perché se discretizzo lo spazio in N intervalli ho N^2 valori di u_{jl} . Se $N = 100$ la matrice da invertire è di ordine 10000.

Per risolvere il sistema si possono usare i metodi di rilassamento

Trovo una matrice E che sia abbastanza vicina ad A e molto facile da invertire

$$A = E - F \quad A\vec{u} = E\vec{u} - F\vec{u} = \vec{b}$$

e quindi

$$\vec{u} = E^{-1}(F\vec{u} + \vec{b})$$

Posso allora definire una successione

$$\vec{u}_{n+1} = E^{-1}(F\vec{u}_n + \vec{b})$$

sperando che converga, e in questo caso converge alla soluzione del mio problema

Sistemi che evolvono nel tempo

Metodo della conservazione del flusso

Un tipo di equazioni abbastanza conosciuto è della forma

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{\partial F\vec{u}}{\partial x}$$

Esempio: l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Scrivendo $\vec{u} = (\psi, \phi)$ un'equazione equivalente potrebbe essere

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = v \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{pmatrix}$$

e perciò

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 0 \end{pmatrix}$$

Un'altro esempio è:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

che so avere soluzione $u = f(x - vt)$ con f arbitraria. Discretizzo tempo e spazio scrivendo

$$u(x = x_0 + j\Delta x, t_0 + n\Delta t) = u_j^n$$

e ottengo

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

Forward Time Centered Space (FTCS) che mi permette di calcolare u al tempo $t + \Delta t$ se conosco il suo valore al tempo t . Nota: per come ho discretizzato uno solo dei valori è calcolato al tempo $t + \Delta t$

Stabilità

Posso supporre che i coefficienti delle derivate varino lentamente rispetto a come varia la mia soluzione u nel tempo e nello spazio, e siano quindi approssimabili con delle costanti. Posso allora valutare la stabilità del mio metodo di soluzione cercando delle soluzioni della forma

$$u_j^n = \xi^n \exp(ikj\Delta x) \quad \xi = \xi(k)$$

ξ è in generale un numero complesso, e se è maggiore di 1 la soluzione diverge per tempi grandi. Sostituendo quest'espressione nell'equazione trovo

$$\xi^{n+1} \exp(ikj\Delta x) - \xi^n \exp(ikj\Delta x) = -\frac{v\Delta t}{2\Delta x} \cdot (\xi^n \exp(ik(j+1)\Delta x) - \xi^n \exp(ik(j-1)\Delta x))$$

ovvero

$$\xi - 1 = -\frac{v\Delta t}{2\Delta x} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x))$$

$$\xi = 1 - i \frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

che ha modulo sempre maggiore di 1. Questo metodo è perciò sempre instabile

Una possibile cura è discretizzare la derivata temporale in modo diverso.

$$u_j^n \rightarrow \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$$

che darebbe l'equazione

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

In questo caso, facendo il calcolo come prima, si trova

$$\xi = \cos(k\Delta x) - i\frac{v\Delta t}{\Delta x}\sin(k\Delta x)$$

che da' $|\xi| < 1$, e quindi stabilità, per

$$\frac{|v|\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad \text{Condizione di Courant}$$

Questa discretizzazione dell'equazione si poteva ottenere anche dall'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con il metodo FTCS. In pratica, è come se avessi aggiunto un termine di attrito (attrito numerico)

Se l'equazione è per un vettore bidimensionale posso fare un'analoga analisi di stabilità trovando

$$\xi = \cos(k\Delta x) \pm i \frac{|v|\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$$

che porta nuovamente alla condizione di Courant

Ci sono anche requisiti fisici da soddisfare: l'equazione descrive la propagazione di onde ma una perturbazione nel sito j si propaga in entrambe le direzioni. Convieni allora discretizzare come

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad v_j^n > 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -v_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad v_j^n < 0$$

$$|\xi| = 1 - 2 \frac{|v| \Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{|v| \Delta t}{\Delta x} \right) \cos(k \Delta x)$$

che porta alla solita condizione di Courant. Nei calcoli pratici conviene avere $\xi=0.2$, e il problema principale non è tanto la stabilità, quanto il fatto che la discretizzazione è al primo ordine nel tempo e secondo nello spazio

Metodo leapfrog

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F u}{\partial x}$$

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n) \right)$$

- In questo modo le derivate sono “centrate” nel tempo, e l’algoritmo diventa del secondo ordine
- devo tenere in memoria i valori a due tempi diversi invece che a uno solo
- Se $F(u) = vu$ l’equazione per ξ è ora quadratica ma si trova ancora la condizione di Courant $v\Delta t < \Delta x$ e in questo caso $\xi = 1$ è costante nel tempo.

Diffusione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

è di tipo flux-conservative con $Fu = D \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

L'analisi di stabilità trova

$$\xi = 1 - \frac{4D\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$$

La condizione di stabilità è quindi

$$\frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

Per ottenere qualcosa di più stabile devo “barare” un po’ discretizzando la parte spaziale al tempo $t + \Delta t$ invece che al tempo t .

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = D \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

e, ponendo $\alpha = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ trovo l'equazione

$$-\alpha u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\alpha)u_j^{n+1} - \alpha u_{j-1}^{n+1} = u_j^n$$

che è un'equazione tridiagonale, facilmente risolvibile quando conosco le condizioni al contorno in $j = 0$ e $j = J$ Con questo algoritmo

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}$$

che è sempre minore di uno, e quindi stabile. Questo algoritmo mi dà comunque sempre la soluzione di equilibrio giusta.

Se prendo una media tra i valori a t e a $t + \Delta t$ ottengo un metodo noto come Crank-Nicolson.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{D \left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} \right) + \left(2u_{j+1}^n - 2u_j^n + 2u_{j-1}^n \right)}{2\Delta x^2}$$

Questo metodo è preciso al secondo ordine nello spazio e nel tempo ed in più

$$\xi = \frac{1 - 2\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{1 + 2\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}$$

quindi è sempre stabile.

Rilassamento

- Quanto visto sullo studio dei problemi di valore iniziale può essere applicato anche alle equazioni ellittiche

- L'equazione

$$\mathcal{L}u = \rho$$

può essere sostituita dall'equazione di evoluzione temporale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho - \mathcal{L}u$$

- Allora la soluzione cercata è semplicemente ottenuta dall'evoluzione temporale di u , supponendo che questa abbia un limite stazionario
- Si vede quindi che i metodi di rilassamento possono essere studiati guardando alle proprietà di convergenza dell'equazione di evoluzione temporale corrispondente