Radici di equazioni

L'equazione:

$$f(x) = 0$$

ha un numero di soluzioni non note a priori

1. isolo la radice

2. calcolo con precisione il valore

Non c' è un metodo universale per 1). Possibili strategie

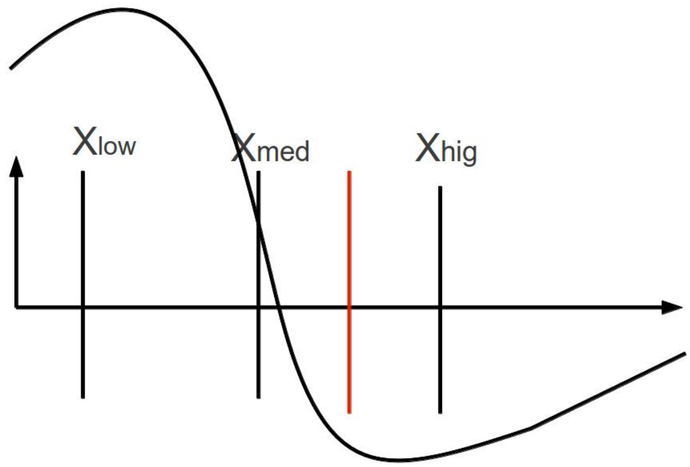
- parto da un intervallo e lo allargo fino a includere una radice

- divido l'intervallo in cui cerco la radice in intervallini $[x_{j-1}, x_j]$ finché

$$f(x_{j-1}) \cdot f(x_j) < 0$$

Isolata la radice la si può calcolare con il metodo di bisezione

Alternativa: parto da uno o due punti e cerco una successione che converga alla radice.



Bisezione

Se in $[x_{low}, x_{hig}]$ esiste una ed una sola radice e la voglio calcolare con precisione ε suppongo che:

$$f(x_{low}) < 0 \quad \text{e} \quad f(x_{hig}) > 0$$

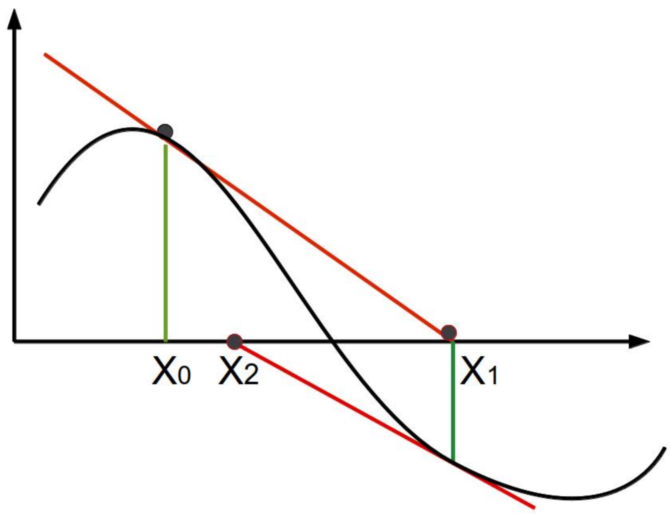
Prendo allora il punto medio

$$x_{med} = \frac{1}{2} \cdot (x_{low} + x_{hig})$$

e calcolo $f(x_{med})$.

- Se $|x_{hig} - x_{low}| < \varepsilon$ termino il ciclo;
- se $f(x_{med})$ e $f(x_{low})$ hanno lo stesso segno ;
  1. $[x_{med}, x_{hig}]$ come nuovo intervallo;
  2. $\frac{1}{2} \cdot (x_{med} + x_{hig})$ è il nuovo punto medio;
- Se $f(x_{med})$ e $f(x_{hig})$ hanno lo stesso segno;
  1. $[x_{low}, x_{med}]$ come nuovo intervallo;
  2. $\frac{1}{2} \cdot (x_{low} + x_{med})$ è il nuovo punto medio;
- ripeto il ciclo;

La precisione dopo N passi è $\frac{1}{2^N}$ volte l'intervallo iniziale.



Metodo di Newton

È applicabile quando si conosce la derivata della funzione.
Espando la funzione vicino allo zero

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

supponendo quindi che i termini non lineari si possano trascurare. Se la relazione fosse esatta, e non approssimata al primo ordine, avrei per lo zero α:

$$0 = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (\alpha - x_1)$$

e quindi

$$\alpha = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

In generale però la successione definita da

$$x_{N+1} = x_N - \frac{f(x_N)}{f'(x_N)}$$

può convergere verso un limite finito, e in questo caso il limite è una radice dell'equazione.

Inconvenienti

- la convergenza non è garantita;
- è necessario conoscere la derivata.

Precisione

Chiamo α la radice, quindi $f(\alpha) = 0$. Esisterà allora uno ξ_N, con $\alpha < \xi_N < x_N$ tale che:

$$f(\alpha) - f(x_N) = (\alpha - x_N) \cdot f'(x_N) + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi_N) \cdot (\alpha - x_N)^2$$

da cui, essendo $f(\alpha) = 0$:

$$-\frac{f(x_N)}{f'(x_N)} = (\alpha - x_N) + \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(x_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2$$

$$\alpha - x_N = -\frac{f(x_N)}{f'(x_N)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(x_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2$$

Ricordando che

$$(x_{N+1} - x_N) = -\frac{f(x_N)}{f'(x_N)}$$

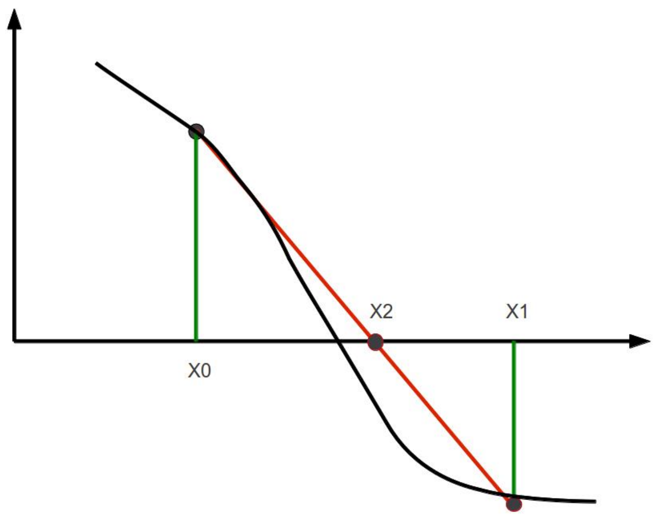
trovo

$$\alpha - x_N = (x_{N+1} - x_N) - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(x_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2$$

$$\alpha - x_{N+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi_N)}{f'(\xi_N)} \cdot (\alpha - x_N)^2 = C_N \cdot (\alpha - x_N)^2$$

Per $N \to \infty$ $C_N \to C$ purché la derivata non si annulli. l'andamento dell'errore è quindi

$$|\alpha - x_{N+1}| \approx C \cdot |\alpha - x_N|^2$$



Metodo della secante

- È utile quando non si può calcolare la derivata;
- richiede la conoscenza della funzione in due punti per partire.

Attraverso due punti di una curva passa una secante: la posso prolungare fino al punto dove interseca le ascisse. (x_0, f_0) e (x_1, f_1) siano i due punti iniziali

$$\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

Imponendo $f_2 = 0$ si trova il nuovo punto x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1}{f_1 - f_0} \cdot (x_1 - x_0)$$

Analogamente i punti successivi sono dati dalla relazione di ricorrenza:

$$x_{N+1} = x_N - \frac{f_N}{f_N - f_{N-1}} \cdot (x_N - x_{N-1})$$

L'errore è dato da

$$|\alpha - x_{N+1}| \approx C \cdot |\alpha - x_N| \cdot |\alpha - x_{N-1}|$$

Metodi di punto fisso

Un punto x_0 per cui valga

$$g(x_0) = x_0$$

si dice punto fisso di $g(x)$. Posto $f(x) = g(x) + x$ si ha

$$g(x_0) = f(x_0) + x_0 = x_0 \Rightarrow f(x_0) = 0$$

Esiste quindi una stretta relazione tra punti fissi e zeri. Un modo per trovare gli zeri di una funzione $f(x)$ è trovare i punti fissi di $g(x) = f(x) + x$.

Il metodo più semplice consiste nel definire la successione

$$x_{N+1} = g(x_N)$$

il cui limite è un punto fisso (se esiste finito). questa successione non è però l'unica scelta possibile: ad esempio, l'equazione

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

è equivalente a

$$x^2 - 2x + 2 = x$$

ma anche a

$$3 - \frac{2}{x} = x$$

che hanno gli stessi punti fissi, ma possono avere diverse proprietà di convergenza

x_N converge in un intervallo $[a, b]$ se per ogni $x, y \in [a, b]$ vale

$$|g(x) - g(y)| < k \cdot |x - y| \qquad k < 1$$