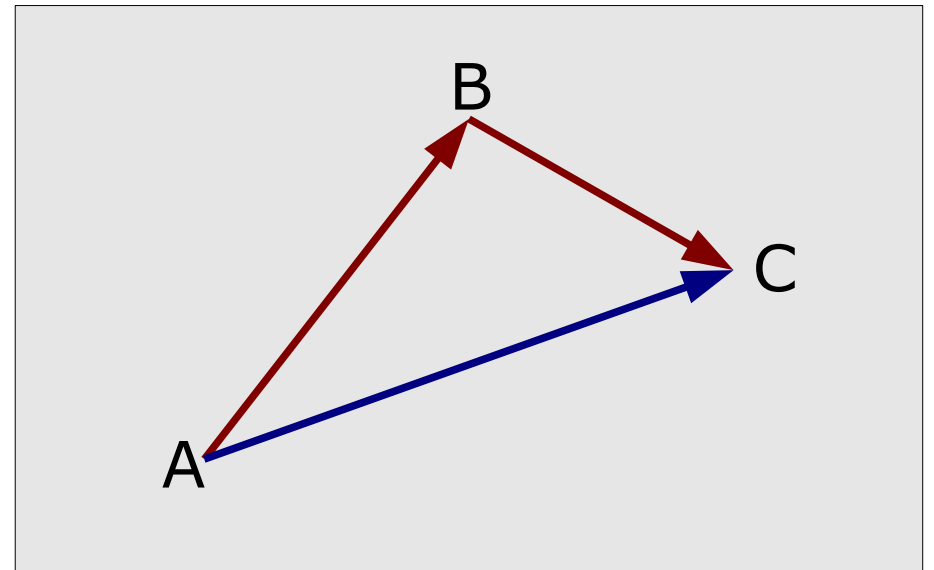


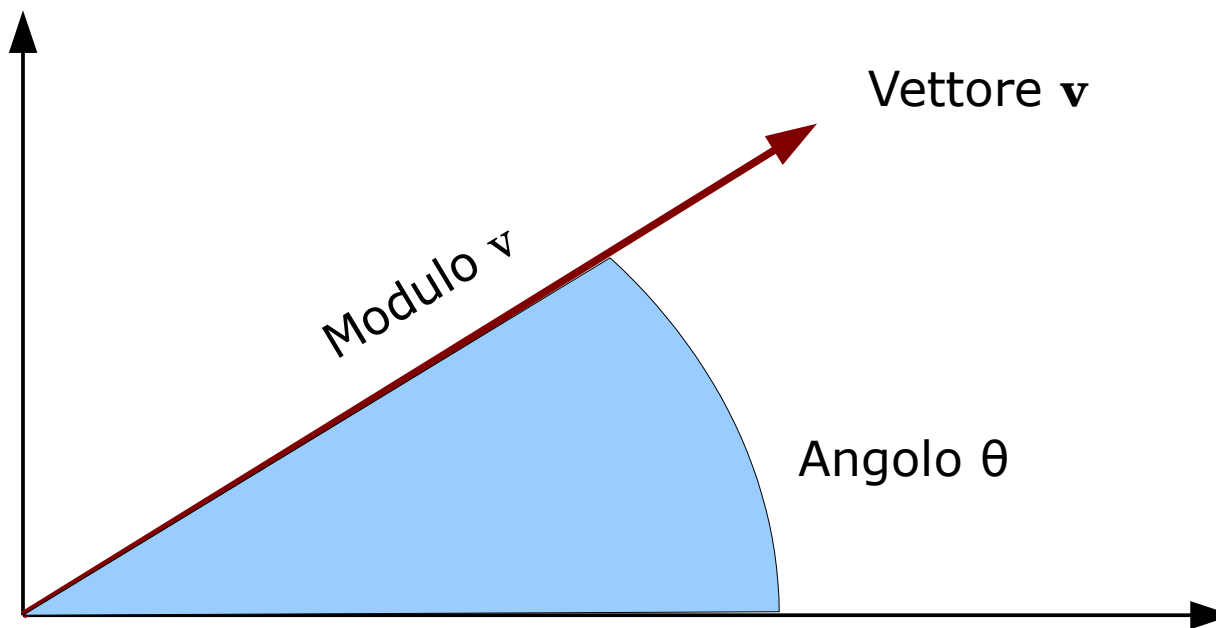
# Vettori e scalari

- Lo spostamento: il prototipo del vettore
- La distanza percorsa è il modulo del vettore
- Somma di due spostamenti: metto la coda del secondo sulla punta del primo



# Modulo e angolo

- Posso descrivere un vettore con la sua lunghezza e con l'angolo che fa con le ascisse

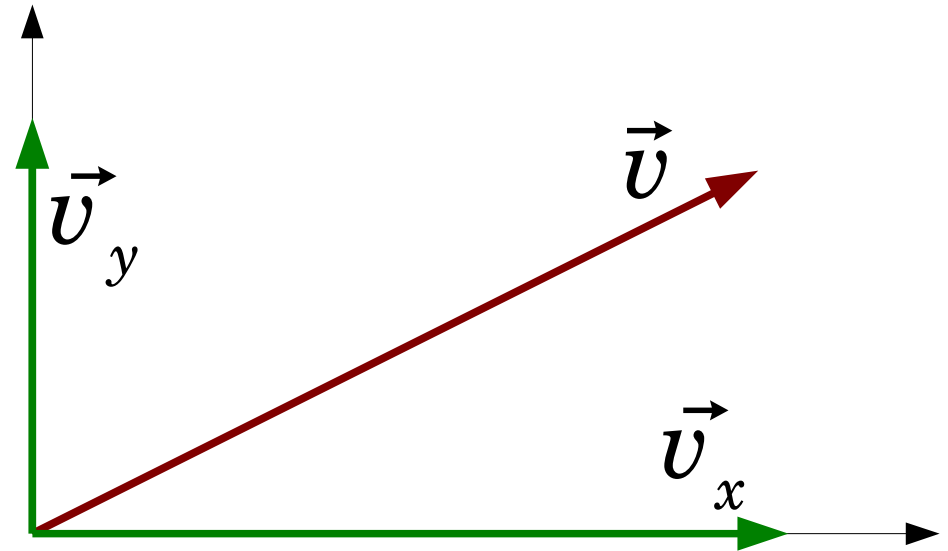


# Operazioni tra vettori

- Somma: si somma come lo spostamento
- Opposto: la somma di un vettore con l'opposto è il vettore nullo: quindi il vettore opposto ha uguale lunghezza, stessa direzione ma verso opposto
- Differenza: è la somma di un vettore con l'opposto
- Prodotto di un vettore  $\mathbf{v}$  per uno scalare  $a$ :  
se  $a > 0$  è un vettore diretto come  $\mathbf{v}$ , con modulo  $av$ , altrimenti ha modulo  $av$  e verso opposto a  $\mathbf{v}$

# Componenti

- Proiezioni sugli assi
- **Vettori componenti**
- Un vettore di lunghezza uno diretto come  $x, y$  o  $z$  si chiama *versore*



- I versori paralleli a  $x, y$  e  $z$  si indicano con  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
- **Componenti scalari**
- $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$

# Componenti e operazioni

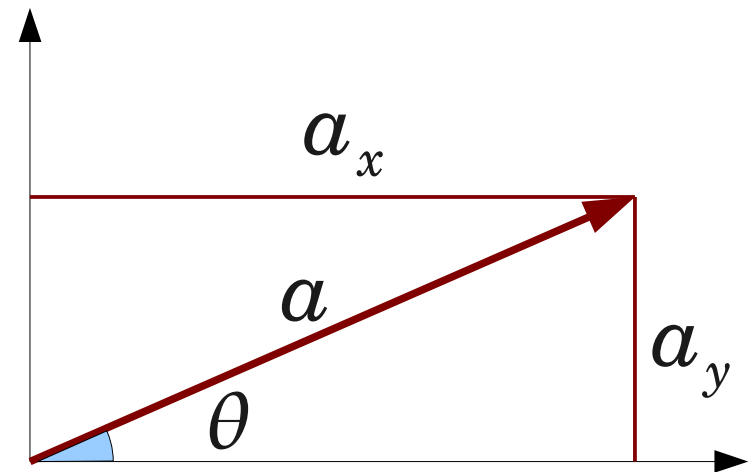
- Somma di vettori tramite componenti

$$\vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + b_x \vec{i} + b_y \vec{j} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j}$$

- Il vettore somma ha per componenti le somme delle componenti
- Il vettore differenza ha per componenti le differenze delle componenti

$$a_x = a \cos(\theta) \quad a_y = a \sin(\theta)$$

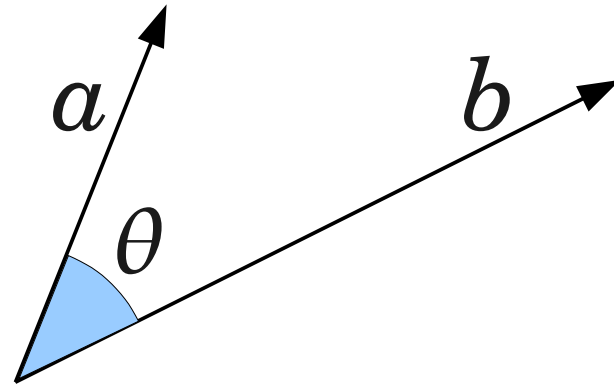
$$\tan(\theta) = a_y / a_x \quad a_x^2 + a_y^2 = a^2$$



# Prodotto scalare

- Angolo tra vettori
- Prodotto scalare

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\theta)$$



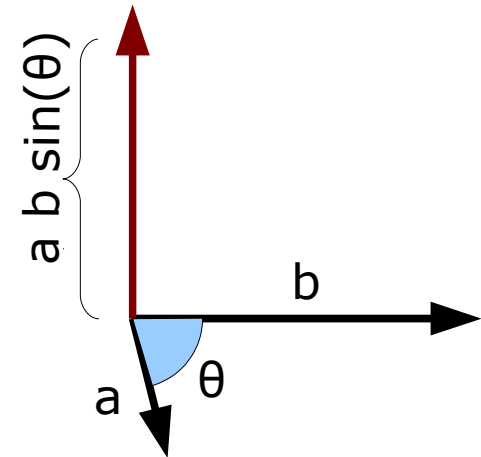
- Vale la proprietà distributiva  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Prodotto scalare di versori  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$   $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$   $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$   
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x + a_y b_y$
- Vale la proprietà riflessiva  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Dove si usa in fisica? Lavoro di una forza

# Prodotto vettore

- È perpendicolare ai due vettori
- Il verso si determina con la regola della mano destra

$$\vec{a} \wedge \vec{b} \equiv \vec{a} \times \vec{b}$$

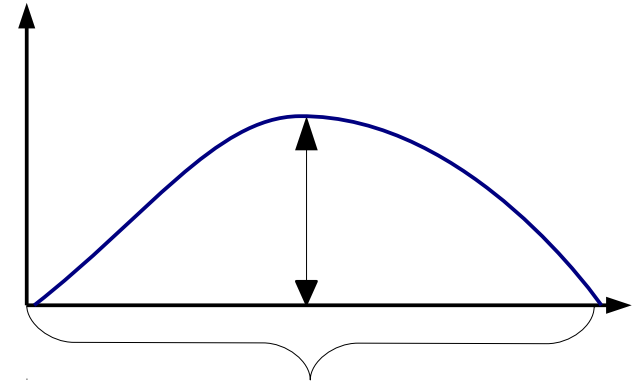
$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = a b \sin(\theta)$$



- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$  e vale la proprietà distributiva
- Per i versori  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$   $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$   $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$   $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_i = \vec{0}$
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$
- In fisica si trova nello studio delle rotazioni e dei campi magnetici

# Moto di un proiettile

- Il moto è in due dimensioni
- Il moto in ciascuna dimensione è indipendente dall'altra
- Il moto lungo  $x$  è rettilineo uniforme
- Il moto lungo  $y$  è uniformemente accelerato
- Dati caratteristici del problema sono la posizione e la velocità iniziali (entrambi vettori)
- Quantità che vogliamo calcolare sono gittata, punto dove l'altezza è massima, tempo di salita e di caduta





# Moto di un proiettile -2-

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - g t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

- Condizione di massima altezza è  $v_y = 0$  e quindi  $t = v_{0y} / g$
- Sostituisco nella posizione e trovo  $x$  e  $y$  nel massimo:  $x = x_0 + v_{0x} v_{0y} / g$ ,  
 $y = y_0 + v_{0y}^2 / 2g$
- Gittata: la condizione è  $y = 0$  e  $x \neq 0$
- Trovo il valore di  $t$  per cui è vero, e quindi  $x$
- Se  $y_0 = 0$   $t = 0$  oppure  $t = 2v_{0y} / g$  e quindi  $x - x_0 = 2v_{0x} v_{0y} / g$
- $v_{0x} = v_0 \cos(\theta)$   $v_{0y} = v_0 \sin(\theta)$   $x - x_0 = v_0^2 \cdot \sin(2\theta) / g$  e la gittata è massima per  $\theta = 45^\circ$

# Moto di un proiettile -3-

- Equazione della traiettoria

$$t = (x - x_0) / v_{0x}$$

$$y - y_0 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} (x - x_0) - \frac{g}{2v_{0x}^2} (x - x_0)^2$$

- È l'equazione di una parabola

# Velocità relativa

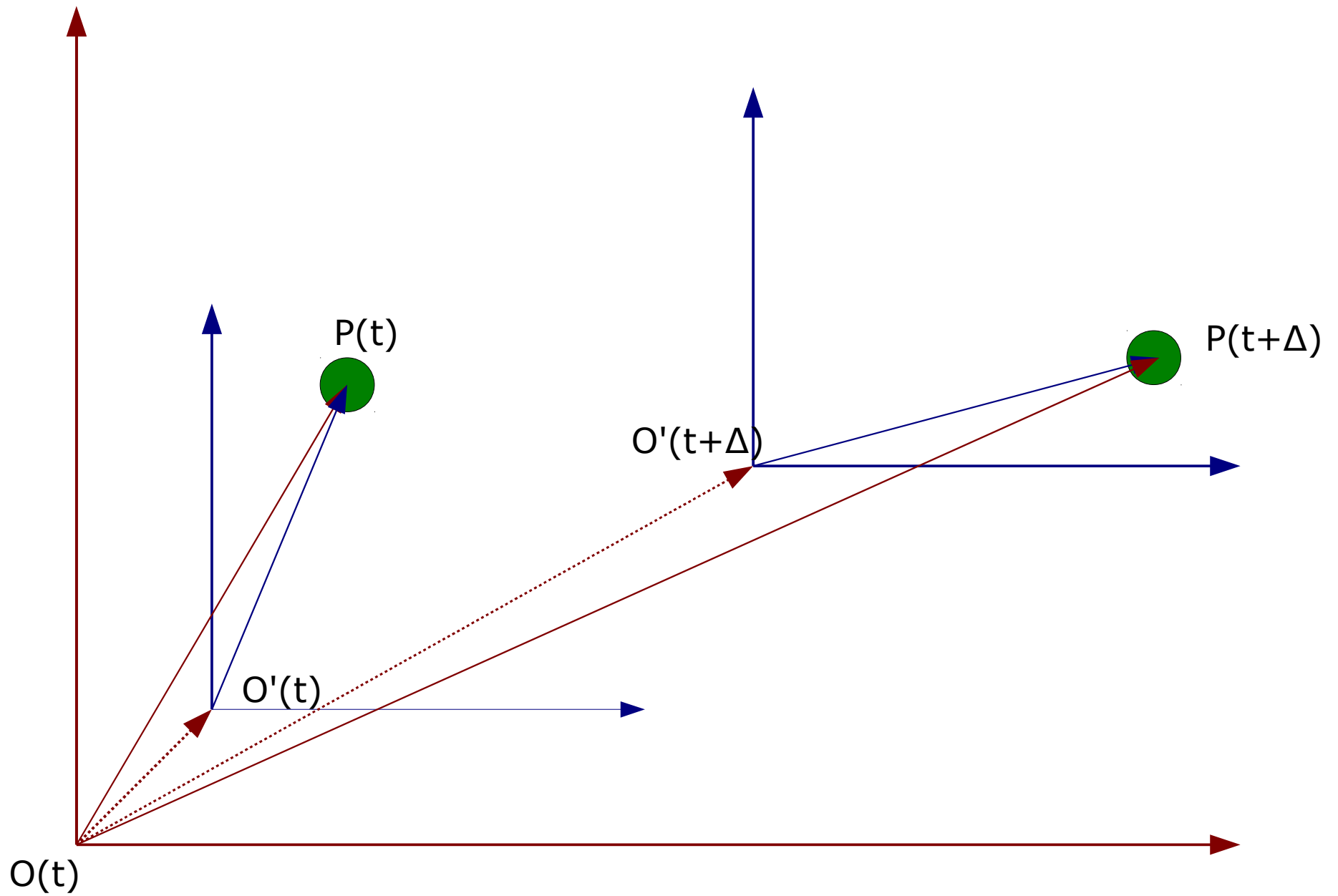
- Un'auto si muove a  $100 \text{ Km/h}$  e viene superata da una che va a  $120 \text{ Km/h}$ . Qual è la velocità dell'auto superante vista da quella superata?
- Due sistemi di riferimento che si muovono con velocità relativa costante si dicono tra loro inerziali
- $O$  e  $O'$  siano le origini.  $OP(t) = x(t)$  e  $OP'(t) = x'(t)$  posizioni al tempo  $t$ , e analogamente al tempo  $t+\Delta$ .
- $V$  è la velocità rispetto ad  $O$ ,  $v'$  rispetto a  $O'$

$$\vec{v}_P = (\vec{OP}(t+\Delta) - \vec{OP}(t)) / \Delta \quad \vec{v}'_P = (\vec{O'P}(t+\Delta) - \vec{O'P}(t)) / \Delta$$

$$\vec{v}_P = (\vec{OO'}(t+\Delta) + \vec{O'P}(t+\Delta) - \vec{OO'}(t) - \vec{O'P}(t)) / \Delta$$

$$\vec{v}_P = (\vec{OO'}(t+\Delta) - \vec{OO'}(t)) / \Delta + (\vec{O'P}(t+\Delta) - \vec{O'P}(t)) / \Delta = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P$$

$$\vec{v}'_P = \vec{v}_P - \vec{v}_{O'}$$



# Problemi

- La somma vettoriale di due velocità è sempre di modulo maggiore dei moduli degli addendi?
- Tre vettori di lunghezza diversa si possono sommare per dare il vettore nullo? Se sì, in quale caso?
- Se sono su un treno che ne sorpassa un'altro, sembra che il secondo treno si muova all'indietro. Perché?
- Lancio in alto una palla da un'auto che si muove con velocità costante. Come si muove la palla rispetto al terreno?
- Anche se ho un ombrello, camminando sotto la pioggia mi bagna. Perché?

# Esercizi

- **Un furgone deve fare delle consegne viaggiando per 18 isolati verso nord, 10 verso est e 16 verso sud. Qual è il suo spostamento finale?**
- **Una montagna distante 10 Km è alta 2500 metri. Qual è la distanza della cima?**
- **Da una rupe alta 30 m lancio un sasso con velocità diretta orizzontalmente di 3 m/s. A che distanza dal fondo della rupe cade il sasso?**
- **Un artigliere spara un proiettile con una velocità iniziale di 10 m/s ad un angolo di 30°. Quanto tempo resta in aria il proiettile?**
- **Un astronauta che salta in lungo 5 m sulla Terra, prova a saltare anche sulla luna dove l'accelerazione di gravità è un sesto, con uguali angolo di salto e velocità iniziale. Qual è la lunghezza del salto?**
- **Un atleta salta 7 m staccando ad un angolo di 30°. Qual era il modulo della velocità iniziale?**
- **Le gocce della pioggia viste da un treno che si muove con velocità  $v$  rispetto ai binari formano un angolo  $\theta$  con la verticale. Qual è la velocità con cui cade la pioggia, se cade verticalmente rispetto al terreno con velocità di modulo 1 m/s?**