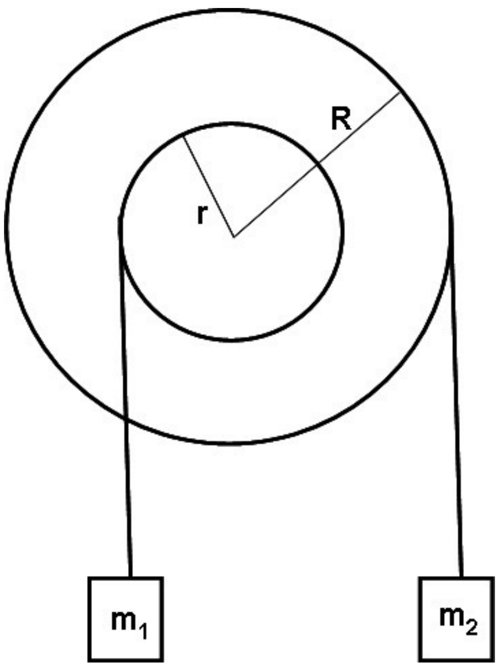
Esercizio n°1

Su un disco di massa M e raggio R è praticata una sottile scanalatura di raggio r che non altera il suo momento d'inerzia. Al disco, che può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro, sono appesi due corpi di massa m_1 e m_2 mediante due funi ideali arrotolate come in figura. Il sistema, inizialmente in quiete, viene lasciato libero di muoversi.

Scrivere le equazioni del moto del sistema, determinando le accelerazioni lineari dei due corpi, l'accelerazione angolare della carrucola, il valore delle tensioni nelle due funi, con i seguenti valori numerici: *M = 1 kg*, *r = 10 cm*, *R = 20 cm*, *m_1=100 g*, *m_2=200g*.



DATI:

R = 20 cm   M = 1 kg

r = 10 cm

m_1 = 100 g m_2 = 200 g

t = 0 sistema in quiete

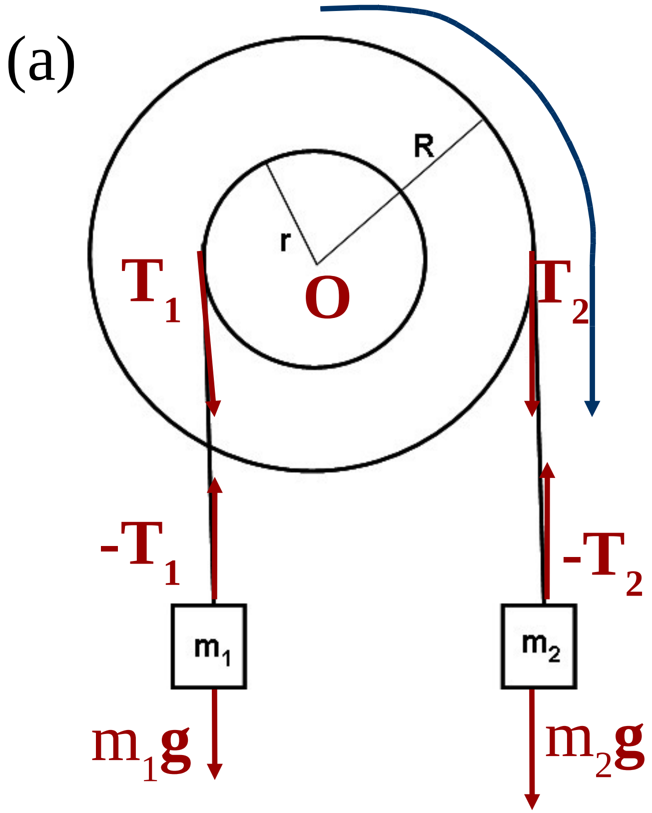
a) ? a_1 a_2

b) ?α acc. angolare

c) ? T_1 e T_2

Svolgimento esercizio 1 (1)

(a)



Dopo aver fissato un verso per la rotazione della carrucola, individuiamo le forse in gioco. Per convenzione fissiamo il verso di rotazione in modo tale che il corpo più pesante (in questo caso m_2) scenda e l'altro salga.

In base a ciò scriviamo le equazioni del moto per m_1 ed m_2 con gli opportuni segni:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad (1)$$

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a_1 \qquad (2)$$

e l'equazione rotazionale per la carrucola:

$$\vec{M}_0 \equiv I \vec{\alpha} \Rightarrow \qquad RT_2 - rT_1 = I\alpha \qquad (3)$$

dove il momento di inerzia del disco rispetto al suo CM è noto: $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$

Dalla (1) e (2) ricavo: $T_2 = m_2 (g - a_2)$

$$T_1 = m_1 (g + a_1)$$

Svolgimento esercizio 1 (2)

Inoltre posso scrivere le relazioni che legano le accelerazioni dei due punti materiali all'accelerazione angolare della carrucola:

$$a_1 = \alpha r \qquad a_2 = \alpha R$$

Sostituendo le espressioni delle tensioni ed esplicitando a_1 e a_2 nella (3) si ottiene:

$$R\left[m_2\left(g-\alpha R\right)\right]-r\left[m_1\left(g+\alpha r\right)\right]=\frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{m_2 R - m_1 r}{\frac{1}{2}MR^2+m_2R^2+m_1r^2}g=10.14\,rad/s^2$$

di conseguenza: $a_1=\alpha r=1.014\,m/s^2$ $\qquad$ $a_2=\alpha R=2.027\,m/s^2$

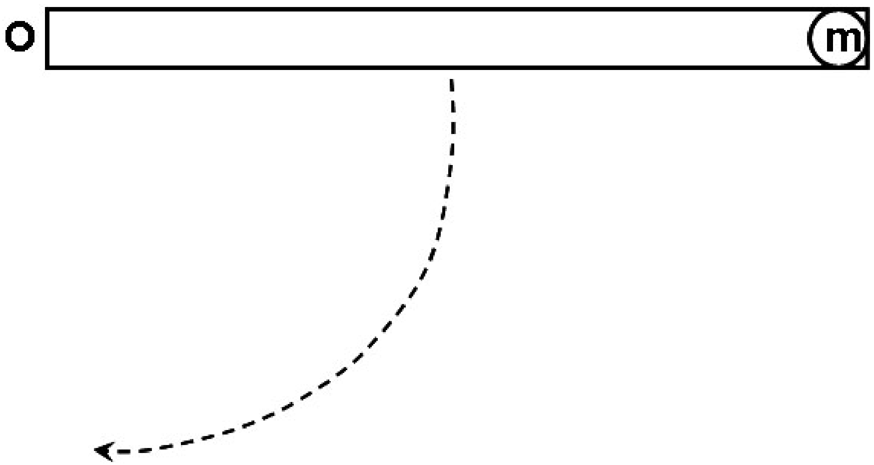
diretta verso l'alto (m_1 sale) **diretta verso il basso (m_2 scende)**

e dalla (1) e (2): $T_1=m_1\left(g+a_1\right)=1.08\,N$ $\qquad$ $T_2=m_2\left(g-a_2\right)=1.55\,N$

Esercizio n°2

Una sbarretta uniforme di massa $M = 2\ kg$ e lunghezza $\ell = 1\ m$, è libera di ruotare in un piano verticale intorno ad un asse orizzontale senza attrito passante per un suo estremo. Sull'altro estremo della sbarretta è fissato un corpo, approssimabile ad un punto materiale, di massa $m = 2\ kg$. La sbarretta inizialmente ferma in posizione orizzontale, viene lasciata cadere. Determinare:

a. la posizione del centro di massa del sistema;
b. l'accelerazione angolare iniziale del sistema e l'accelerazione tangenziale iniziale dell'estremità destra della sbarretta;
c. la velocità del centro di massa quando il sistema raggiunge la posizione verticale.



DATI:

sbarretta: M = 2 kg ℓ = 1 m

corpo puntiforme: m = 2 kg

t = 0 sbarretta orizzontale in quiete

(a) ? X_{CM}

(b) ? α ed a_t estremità destra

(c) ? V_{CM} sbarretta verticale

Svolgimento esercizio 2 (1)

(a) Calcoliamo la posizione del CM:

$$X_{CM}=\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}=\frac{M\cdot x_{CM}(asta)+m\ell}{M+m}\Rightarrow \qquad X_{CM}=\frac{M\frac{\ell}{2}+m\ell}{M+m}=0.75\,m$$

(b) A questo punto possiamo considerare la situazione equivalente, cioè un punto materiale di massa (m+M) che si trovi a distanza X_{CM} dall'origine; l'unica forza agente su tale punto materiale è la forza peso, il cui momento rispetto al polo O è:

$$\vec{M}_O=\vec{X}_{CM}\times\vec{P}\Rightarrow M_O=(M+m)gX_{CM}$$

Per poter scrivere l'equazione di rotazione del sistema (asta + punto materiale), devo calcolare il momento di inerzia totale:

$$I_O=I_{asta}+I_m$$

Svolgimento esercizio 2 (2)

dove, rispetto al polo 0, si ha:

$$I_m = m\ell^2 \qquad I_{asta} = \left(I_{asta_{CM}} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right) = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\frac{\ell^2}{4}$$

teor. Huygens-Steiner

Quindi il momento di inerzia totale (considerando che M=m)sarà:

$$I_O = \frac{1}{3} M\ell^2 + m\ell^2 = \frac{4}{3} M\ell^2 = 2.67\, kg \cdot m^2$$

Allora posso scrivere l'equazione di rotazione:

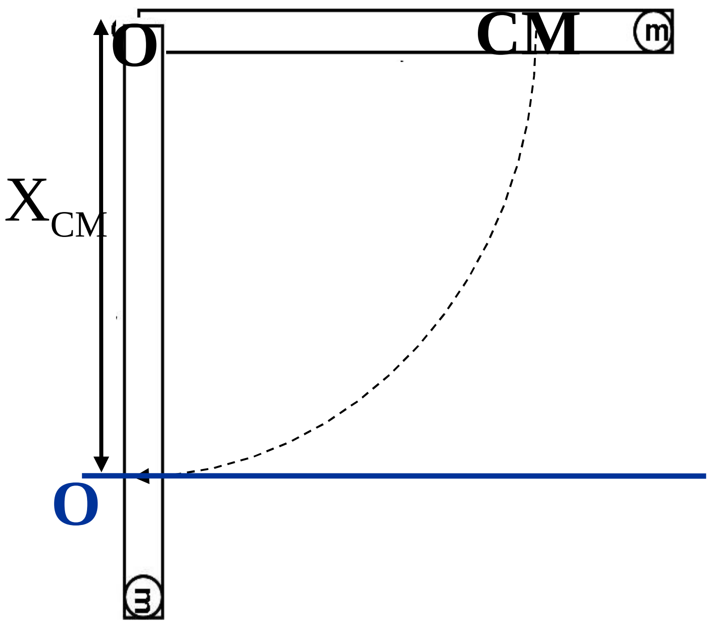
$$\vec{M}_O = I_O \vec{\alpha} \Rightarrow M_O = I_O \alpha \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{M_O}{I_O} = \frac{X_{CM}(m+M)}{I_O} g = 11.01\, rad/s^2$$

Di conseguenza, l'accelerazione tangenziale all'estremità A della sbarretta sarà:

$$a_t(A) = \alpha\ell = 11\, m/s^2$$

Svolgimento esercizio 2 (3)

(c) Per calcolare la velocità del CM quando la sbarretta si trova in posizione verticale, ragioniamo energeticamente imponendo la conservazione dell'energia meccanica totale. Fissiamo il livello 0, corrispondente alla posizione finale del CM:



Nella situazione iniziale, l'energia meccanica totale è data solo dall'energia potenziale gravitazionale del CM che si trova ad altezza X_{CM} rispetto al livello 0:

$$E_i = (m+M)\, g X_{CM}$$

Invece l'energia meccanica finale è solo energia cinetica rotazionale:

$$E_f = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \frac{v_{CM}^2}{X_{CM}^2}$$

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica totale (dato che non ci sono forze non conservative in gioco) otteniamo, sostituendo l'espressione di I_0 e considerando M=m:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{3\, g X_{CM}^3}{\ell^2}} = 3.52\, m/s$$